Problème n° 1 : mouvement d'un disque soudé à une tige

Notions abordées

- **Figures de calcul**
- **Torseur cinématique**
- **Centre d'inertie**
- **Matrice d'inertie**
- **Torseur cinétique**
- **Torseur dynamique**
- **Energie cinétique**

Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct, avec $(O,\vec{z}_0)$ vertical ascendant, supposé galiléen. Le solide étudié *(S)* est constitué par un disque homogène *(D)* de centre *C*, de rayon *r* et de masse *m*, auquel est soudé suivant son axe de révolution une tige *(T)* infiniment mince, homogène de masse identique m et de longueur *l*.

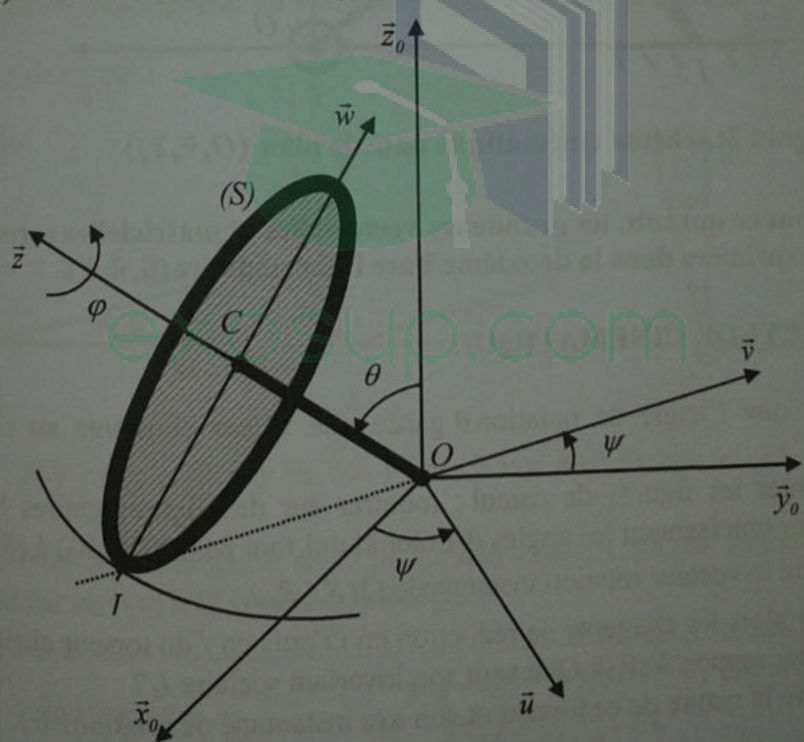


Figure 1: description générale du système

(S) est en articulation sphérique en *O* avec le repère (R_0). Au cours du mouvement de *(S)* par rapport à (R_0), le disque roule sans glisser sur le plan horizontal $(\pi)=(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ et reste en contact ponctuel, avec ce plan en un point *I* de sa circonférence (voir figure 1).

On repère la position de *(S)* à l'aide des angles d'Euler habituels (ψ,θ,φ). On note $R_1(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ et $R_2(O,\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ les repères intermédiaires et $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ le repère lié à *(S)*. On passe de (R_0) à (R) en effectuant les trois rotations successives suivantes :

$$R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)\xrightarrow{(\psi/\vec{z}_0)}R_1(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)\xrightarrow{(\theta/\vec{u})}R_2(O,\vec{u},\vec{w},\vec{z})\xrightarrow{(\varphi/\vec{z})}R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$$

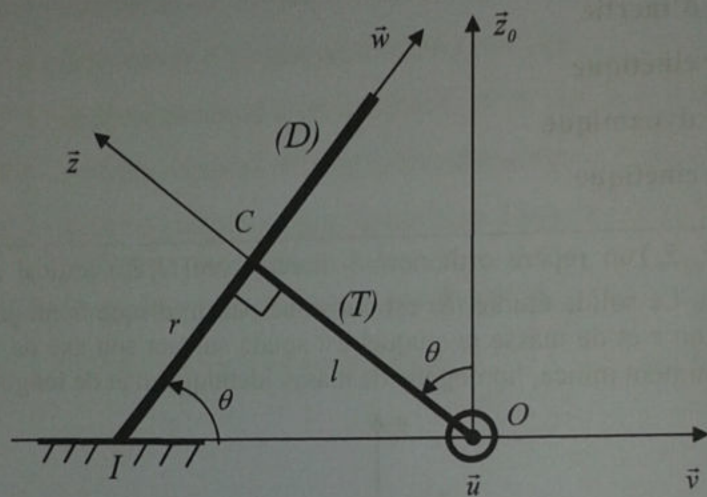


Figure 2: schéma cinématique dans le plan $(O,\vec{v},\vec{z}_0)$

Dans tout ce qui suit, les grandeurs vectorielles et matricielles seront exprimées dans la deuxième base intermédiaire $(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$.

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

Q1- Montrer que l'angle de nutation θ garde une valeur constante au cours du mouvement.

Q2- Représenter les figures de calcul : montrer sur des figures claires les trois rotations planes représentant les angles d'Euler et qui font passer de (R_0) à (R).

Q3- En déduire le vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}(S/R_0)$.

Q4- Exprimer alors les éléments de réduction en O puis en I du torseur cinématique du solide *(S)* par rapport à (R_0). Que vaut son invariant scalaire I_s ?

Q5- En déduire la nature de ce torseur et son axe instantané de rotation $\Delta(t)$.

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

Q6- Trouver la position du centre d'inertie G du système.

Q7- Déterminer la matrice d'inertie du disque *(D)* en son centre C. En déduire sa matrice d'inertie en O.

Q8- Déterminer la matrice d'inertie de la tige *(T)* en O.

Q9- En déduire la matrice d'inertie de *(S)* en O.

Dans la suite des calculs, on posera $A = \dfrac{mr^2}{4} + \dfrac{4}{3}ml^2$ et $C = \dfrac{mr^2}{2}$

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

Q10- Déterminer les éléments de réduction en O du torseur cinétique du solide *(S)* dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q11- Déterminer les éléments de réduction en O du torseur dynamique du solide *(S)* dans son mouvement par rapport à (R_0).

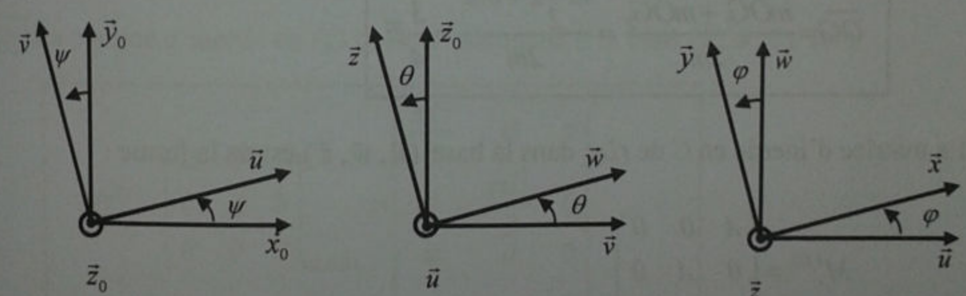
Q12- Calculer l'énergie cinétique T (S/R_0) du solide *(S)* dans son mouvement par rapport à (R_0).

Solution détaillée

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

R1- Au cours du mouvement, on a toujours $\tan\theta = \dfrac{l}{r} \Rightarrow \theta = Arc\tan\left(\dfrac{l}{r}\right) = Cte.$

R2- Figures de calcul :



R3- $\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{z} = \dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z}$ car $\dot{\theta} = 0.$

R4- Les éléments de réduction en O du torseur cinématique du solide *(S)* dans son mouvement par rapport à (R_0) sont données par :

$$[\vartheta(S/R_0)] = {}_O\begin{cases} \vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{z} = \dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z} \\ \vec{V}(O \in S/R_0) = \vec{0} \end{cases}$$

Les éléments de réduction en I du torseur cinématique du solide *(S)* dans son mouvement par rapport à (R_0) sont données par :

$$[\vartheta(S/R_0)] = {}_I\begin{cases} \vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z} \\ \vec{V}(I \in S/R_0) = \vec{0} \end{cases}$$

L'invariant scalaire I_S vaut : $I_S = \vec{\Omega}(S/R_0).\vec{V}(O/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0).\vec{V}(I/R_0) = 0$

R5- Nature du torseur cinématique

L'invariant scalaire de ce torseur est nul et $\vec{\Omega}(S/R_0) \neq \vec{0}$ donc le torseur cinématique est un glisseur

Axe instantané de rotation

Par ailleurs : $\vec{V}(O \in S/R_0) = \vec{0}$ et $\vec{V}(I \in S/R_0) = \vec{0} \Rightarrow$ L'axe instantané de rotation $\Delta(t)$ passe à chaque instant par les 2 points où la vitesse est nulle c'est-à-dire les points O et I : c'est donc la droite variable OI(t).

On peut aussi dire que $\vec{V}(I \in S/R_0) = \vec{V}(O \in S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{OI}$

Or $\vec{V}(O \in S/R_0) = \vec{0}$ et $\vec{V}(I \in S/R_0) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{OI} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\Omega}(S/R_0) // \overrightarrow{OI}$

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

R6- La position du centre d'inertie G de (S) est donnée par :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{m\overrightarrow{OG_1} + m\overrightarrow{OG_2}}{2m} = \frac{m\frac{l}{2}\vec{z} + ml\vec{z}}{2m} = \frac{3}{4}l\vec{z}}$$

R7- La matrice d'inertie en C de (D), dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ est de la forme :

$$M_C^{(D)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$

C étant le moment d'inertie de (D) par rapport à l'axe de symétrie de révolution $(C,\vec{z})$ et A le moment d'inertie de (D) par rapport à tout axe passant par C et perpendiculaire à $(C,\vec{z})$.

$$C = I_{Cz} = \int_{P\in(D)} (x^2 + y^2)dm = \int_{P\in(D)} \rho^2 dm$$

en utilisant les coordonnées polaires, on a :

$dm = \sigma dS = \sigma\, 2\pi\rho\, d\rho$ avec σ la densité surfacique de (D).

$$C = 2\pi\sigma\int_0^r \rho^3 d\rho = \pi\sigma\frac{r^4}{2} = \frac{mr^2}{2} \text{ Et } A = \frac{C}{2} = \frac{mr^2}{4}$$

d'où :

$$M_C^{(D)} = \begin{pmatrix} \frac{mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$

pour déterminer la matrice d'inertie de *(D)* en *O*, il suffit d'utiliser le théorème de Huygens généralisé entre les points *O* et *C* :
d'où :

$$M_O^{(D)} = \begin{pmatrix} \frac{mr^2}{4}+ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4}+ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$

R8- La matrice d'inertie de *(T)* en *O* relativement à la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ est :

$$M_O^{(T)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})} = \begin{pmatrix} \frac{ml^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$

R9- La matrice d'inertie de *(S)* en *O* est alors :

$$M_O^{(S)} = M_O^{(T)} + M_O^{(D)}$$

$$= \begin{pmatrix} (\frac{mr^2}{4}+\frac{4}{3}ml^2) & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{mr^2}{4}+\frac{4}{3}ml^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

R10- Les éléments de réduction en O du torseur cinétique $[C(S/R_0)]$ du solide *(S)* dans son mouvement par rapport à (R_0) sont donnés par :

$$[C(S/R_0)] = {}_O\begin{cases} \vec{R}_C = 2m\vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}_O(S/R_0) \end{cases}$$

avec

$$\vec{V}(G/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{R_0} = \frac{3}{4}l\left[\frac{d\vec{z}}{dt}\right]_{R_0} = \frac{3}{4}l(\dot{\psi}\vec{z}_0 \wedge \vec{z}) = \frac{3}{4}l\dot{\psi}\sin\theta\vec{u}$$

et

$$\vec{\sigma}_O(S/R_0) = M_O^{(S)}\vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$= A\dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z}$$

d'où :

$$\boxed{[C(S/R_0)] = {}_O\begin{cases} \vec{R}_C = 2m\vec{V}(G/R_0) = \dfrac{3}{2}ml\dot{\psi}\sin\theta\vec{u} \\ \vec{\sigma}_O(S/R_0) = A\dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z} \end{cases}}$$

R11- Les éléments de réduction en O du torseur dynamique $[D(S/R_0)]$ du solide *(S)* dans son mouvement par rapport à (R_0) sont donnés par :

$$[D(S/R_0)] = {}_O\begin{cases} \vec{R}_D = 2m\vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}_O(S/R_0) \end{cases}$$

avec

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \frac{3}{4}l(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{u} + \frac{3}{4}l\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\vec{w} - \frac{3}{4}l\dot{\psi}^2\sin^2\theta\vec{z}$$

donc :

$$\boxed{\vec{R}_D = \frac{3}{2}ml(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{u} + \frac{3}{2}ml\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\vec{w} - \frac{3}{2}ml\dot{\psi}^2\sin^2\theta\vec{z}}$$

par ailleurs :

$$\vec{\delta}_O(S/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_O(S/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_O(S/R_0)}{dt}\right]_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})} + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{\sigma}_O(S/R_0)$$

soit

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_O(S/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \begin{vmatrix} 0 \\ A\ddot{\psi}\sin\theta \\ C(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\cos\theta) \end{vmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})} + \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{vmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ A\dot{\psi}\sin\theta \\ C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta) \end{vmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$

d'où :

$$\boxed{\vec{\delta}_O(S/R_0) = \begin{vmatrix} C\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta+(C-A)\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ A\ddot{\psi}\sin\theta \\ C(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\cos\theta) \end{vmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}}$$

R12- L'énergie cinétique T (S/R_0) du solide *(S)* dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$\boxed{\begin{aligned} T(S/R_0) &= \frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(S/R_0)M_O^{(S)}\vec{\Omega}(S/R_0) \\ &= \frac{A}{2}\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\frac{C}{2}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)^2 \end{aligned}}$$

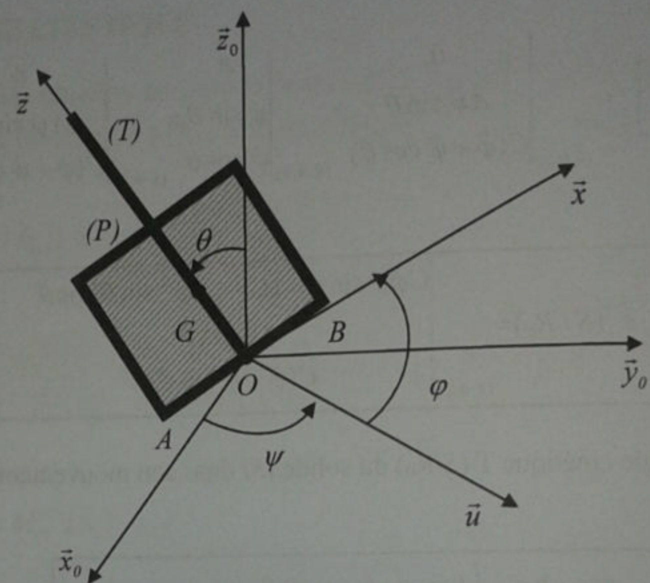
Problème n° 2 : mouvement d'une tige soudée à une plaque carrée

Notions abordées

- **Figures de calcul**
- **Torseur cinématique**
- **Vecteur instantané de rotation**
- **Matrice d'inertie**
- **Torseur cinétique**
- **Energie cinétique**

On considère un repère orthonormé direct $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ par rapport auquel on étudie le mouvement d'un solide (Σ) constitué :

- d'une tige *(T)* de masse négligeable dont une extrémité passe par O, la liaison en O étant telle que *(T)* peut tourner autour de $(O,\vec{z}_0)$ en faisant toutefois un angle θ constant avec l'axe $(O,\vec{z}_0)$ $(\theta \neq 0)$.
- d'une plaque carrée homogène de masse m et de côté $2L$, soudée à *(T)*, de telle sorte que son centre d'inertie G soit sur *(T)*, et que O soit le milieu de l'un de ses côtés noté AB. La liaison en O est telle que la plaque peut tourner autour de OG, donc autour de *(T)*.



On introduit les vecteurs unitaires suivants :

$$\vec{z} = \frac{\overrightarrow{OG}}{L} \quad ; \quad \vec{u} = \frac{\vec{z}_0 \wedge \vec{z}}{\|\vec{z}_0 \wedge \vec{z}\|} \quad ; \quad \vec{v} = \vec{z}_0 \wedge \vec{u}$$

$$\vec{x} = \frac{\overrightarrow{OB}}{L} \quad ; \quad \vec{w} = \vec{z} \wedge \vec{u} \quad ; \quad \vec{y} = \vec{z} \wedge \vec{x}$$

ainsi que les angles d'Euler habituels :

$$\psi(t) = (\vec{x}_0, \vec{u}) \; ; \qquad \varphi(t) = (\vec{u}, \vec{x}) \; ; \qquad \theta = Cte$$

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

Q1- Représenter les figures de calcul.

Q2- Déterminer, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, les composantes du vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}(\Sigma / R_0)$.

Q3- Donner les éléments de réduction en O du torseur cinématique de (Σ) dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q4- En déduire les éléments de réduction en G du torseur cinématique de (Σ) dans son mouvement par rapport à (R_0).

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

Q5- Déterminer, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, la matrice d'inertie en G de (Σ) en fonction de $A = \frac{mL^2}{3}$.

Q6- En déduire la matrice d'inertie en O de (Σ) dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

Q7- Déterminer les éléments de réduction en G du torseur cinétique de (Σ) dans son mouvement par rapport à (R_0).

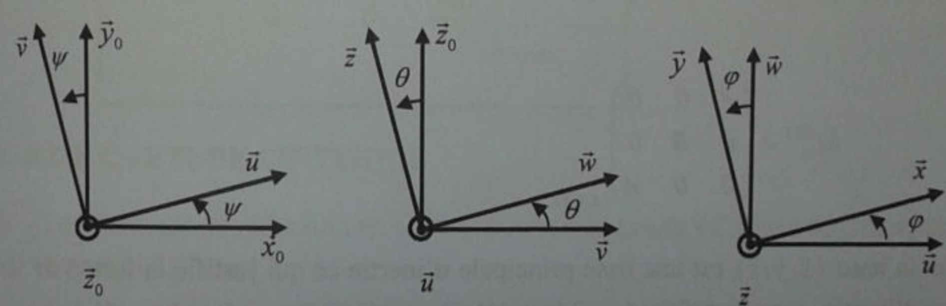
Q8- Déterminer les éléments de réduction en O du torseur cinétique de (Σ) dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q9- Exprimer l'énergie cinétique $T(\Sigma / R_0)$ de (Σ) par rapport à (R_0).

Solution détaillée

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

Q1- Figures de calcul :



R2- Composantes, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, du vecteur instantané de rotation :

$$\vec{\Omega}(\Sigma / R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{z} = \dot{\psi}(\cos\theta\vec{z} + \sin\theta\vec{w}) + \dot{\varphi}\vec{z} = \dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z}$$

$$= \dot{\psi}\sin\theta(\cos\varphi\vec{y} + \sin\varphi\vec{x}) + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z} = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi\vec{x} + \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi\vec{y} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z}$$

R3- Les éléments de réduction en O du torseur cinématique de (Σ) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$\boxed{[\mathcal{V}(\Sigma / R_0)] = {}_O\begin{cases} \vec{\Omega}(\Sigma / R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{z} \\ \vec{V}(O \in \Sigma / R_0) = \vec{0} \end{cases}}$$

R4- Les éléments de réduction en G du torseur cinématique de (Σ) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$[\mathcal{V}(\Sigma / R_0)] = {}_G\begin{cases} \vec{\Omega}(\Sigma / R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{z} \\ \vec{V}(G \in \Sigma / R_0) \end{cases}$$

avec

$$\vec{V}(G \in \Sigma / R_0) = \vec{V}(O \in \Sigma / R_0) + \vec{\Omega}(\Sigma / R_0) \wedge \overrightarrow{OG} = \vec{0} + (\dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{z}) \wedge L\vec{z}$$
$$= L\dot{\psi}\sin\theta\vec{u}$$

d'où :

$$\boxed{[\mathcal{V}(\Sigma / R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(\Sigma / R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{z} \\ \vec{V}(G \in \Sigma / R_0) = L\dot{\psi}\sin\theta\vec{u} \end{array} \right._G}$$

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

R5- Matrice d'inertie en G de (Σ) en fonction de $A = \dfrac{mL^2}{3}$.

$M_G^{(\Sigma)} = M_G^{(T)} + M_G^{(P)} = M_G^{(P)}$ car la masse de la tige est nulle.

La matrice d'inertie en G de la plaque *(P)* relativement à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, est de la forme :

$$M_G^{(P)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

en effet la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, est une base principale d'inertie ce qui justifie la forme de la matrice d'inertie, avec toutefois $A = C$ (car $(G, \vec{x})$ *et* $(G, \vec{z})$ jouent le même rôle) et $B = 2A$.

Si P est un point de la plaque *(P)* alors $P(x, 0, z)$. Ce qui donne :

$$A = \int_{P \in (P)} z^2 dm = \sigma \int_{P \in (P)} z^2 dx dz = \frac{m}{4L^2} \int_{-L}^{L} z^2 dz \int_{-L}^{L} dx = \frac{mL^2}{3} = C$$

d'où :

$$\boxed{M_G^{(\Sigma)} = \begin{pmatrix} \dfrac{mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{mL^2}{3} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

R6- Matrice d'inertie en O de (Σ) dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:
d'après le théorème de Huygens généralisé, on a :

$$A = A_G + mL^2 = \frac{mL^2}{3} + mL^2 = \frac{4}{3}mL^2$$

$$B = B_G + mL^2 = \frac{2mL^2}{3} + mL^2 = \frac{5}{3}mL^2$$

$$C = C_G$$

d'où :

$$\boxed{M_O^{(\Sigma)} = \begin{pmatrix} \frac{4mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

R7- Les éléments de réduction en G du torseur cinétique de (Σ) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$[C(\Sigma/R_0)] = {}_G\begin{cases} m\vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}_G(\Sigma/R_0) \end{cases}$$

avec

$$\vec{\sigma}_G(\Sigma/R_0) = M_G^{(\Sigma)}\vec{\Omega}(\Sigma/R_0) = \begin{pmatrix} \frac{mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\psi\sin\theta\sin\varphi \\ \dot\psi\sin\theta\cos\varphi \\ \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\boxed{\vec{\sigma}_G(\Sigma/R_0) = \frac{mL^2}{3}\dot\psi\sin\theta\sin\varphi\vec{x} + \frac{2mL^2}{3}\dot\psi\sin\theta\cos\varphi\vec{y} + \frac{mL^2}{3}(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)\vec{z}}$$

R8- Les éléments de réduction en O du torseur cinétique de (Σ) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$[C(\Sigma/R_0)] = _O\begin{cases} m\vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}_O(\Sigma/R_0) \end{cases}$$

avec

$$\vec{\sigma}_O(T/R_0) = M_O^{(\Sigma)}\vec{\Omega}(\Sigma/R_0) = \begin{pmatrix} \frac{4mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ \dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\boxed{\vec{\sigma}_O(T/R_0) = \frac{4mL^2}{3}\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi\vec{x} + \frac{5mL^2}{3}\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi\vec{y} + \frac{mL^2}{3}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\vec{z}}$$

R9- L'énergie cinétique $T(\Sigma/R_0)$ de (Σ) par rapport à (R_0) est :

$$T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(O/R_0) + \frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(\Sigma/R_0)M_O^{(\Sigma)}\vec{\Omega}(\Sigma/R_0)$$

$$= 0 + \frac{1}{2}(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi, \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi, \dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta) \begin{pmatrix} \frac{4mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ \dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2mL^2}{3}(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi)^2 + \frac{5mL^2}{6}(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi)^2 + \frac{mL^2}{6}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)^2$$

$$= \frac{mL^2}{6}(4+\cos^2\varphi)\dot{\psi}^2\sin^2\theta + \frac{mL^2}{6}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)^2$$

d'où :

$$\boxed{T(\Sigma/R_0) = \frac{mL^2}{6}\left[(4+\cos^2\varphi)\dot{\psi}^2\sin^2\theta + (\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)^2\right]}$$

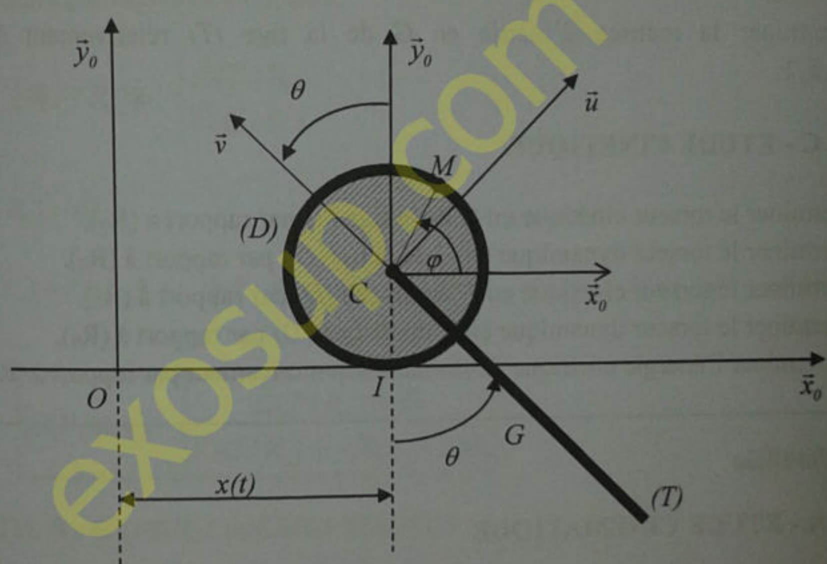
Problème n° 3 : mouvement d'un système pendulaire

Notions abordées

- **Condition de roulement sans glissement**
- **Torseur cinématique**
- **Matrice d'inertie**
- **Torseur cinétique**
- **Torseur dynamique**
- **Energie cinétique**

Soit le système *(S)* constitué des deux solides suivants :

- *(D)* est un disque de masse m_1, de centre C et de rayon R.
- *(T)* est une tige rectiligne de masse m_2, de centre d'inertie G et de longueur $2L$.



La tige *(T)* est articulée sur le disque *(D)* par une liaison rotoïde sans frottement d'axe $(C,\vec{z}_0)$. Le disque *(D)* roule sans glisser sur l'axe $(O,\vec{x}_0)$ du repère de référence $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

On notera I le point de *(D)* en contact avec l'axe $(O,\vec{x}_0)$.

Les paramètres la position de *(S)* sont :

- $x(t)$ l'abscisse du centre C de *(D)*.
- $\varphi(t) = (\vec{x}_0,\overrightarrow{CM})$ où M est un point lié à *(D)* (voir figure).
- $\theta(t) = (\vec{x}_0,\vec{u}) = (\vec{y}_0,\vec{v})$.

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

Q1- Montrer que la condition de roulement sans glissement au point I de *(D)* sur l'axe $(O,\vec{x}_0)$ est : $\dot{x} + R\dot{\varphi} = 0$

Dans la suite du problème cette relation sera prise en compte.

Q2- Déterminer les éléments de réduction en C du torseur cinématique de *(D)* dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q3- Donner les éléments de réduction en G du torseur cinématique de *(T)* dans son mouvement par rapport à (R_0).

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

Q4- Déterminer la matrice d'inertie en C du disque *(D)* relativement à la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Q5- Déterminer la matrice d'inertie en G de la tige *(T)* relativement à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$.

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

Q6- Déterminer le torseur cinétique en G de la tige *(T)* par rapport à (R_0).

Q7- Déterminer le torseur dynamique en G de la tige *(T)* par rapport à (R_0).

Q8- Déterminer le torseur cinétique en C du disque *(D)* par rapport à (R_0).

Q9- Déterminer le torseur dynamique en C du disque *(D)* par rapport à (R_0).

Q10- Déterminer l'énergie cinétique de *(S)* dans son mouvement par rapport à (R_0).

Solution détaillée

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

R1-

$$\vec{V}(I \in D/R_0) = \vec{V}(C \in D/R_0) + \vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \overrightarrow{CI} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{\varphi}\vec{z}_0 \wedge (-R\vec{y}_0) = (\dot{x} + R\dot{\varphi})\vec{x}_0$$

La condition de roulement sans glissement impose :

$$\vec{V}(I \in D/R_0) = \vec{0}$$

soit : $\dot{x} + R\dot{\varphi} = 0$

R2- Les éléments de réduction en C du torseur cinématique de *(D)* dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$[\vartheta(D/R_0)] = {}_C\begin{cases} \vec{\Omega}(D/R_0) \\ \vec{V}(C/R_0) \end{cases}$$

avec

$$\vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\varphi}\vec{z}_0$$

et

$$\vec{V}(C/R_0) = \left[\frac{\overrightarrow{OC}}{dt}\right]_{R_0} = \dot{x}\vec{x}_0 = -R\dot{\varphi}\vec{x}_0$$

d'où :

$$\boxed{[\vartheta(D/R_0)] = \left\{\begin{array}{l}\vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\varphi}\vec{z}_0 \\ \vec{V}(C/R_0) = -R\dot{\varphi}\vec{x}_0\end{array}\right._C}$$

R3- Les éléments de réduction en G du torseur cinématique de *(T)* dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$[\vartheta(T/R_0)] = \left\{\begin{array}{l}\vec{\Omega}(T/R_0) \\ \vec{V}(G/R_0)\end{array}\right._G$$

avec

$$\vec{\Omega}(T/R_0) = \dot{\theta}\vec{z}_0$$

et

$$\vec{V}(G/R_0) = \vec{V}(C/R_0) + \vec{\Omega}(T/R_0) \wedge \overrightarrow{CG} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge (-L\vec{v}) = \dot{x}\vec{x}_0 + L\dot{\theta}\vec{u} = -R\dot{\varphi}\vec{x}_0 + L\dot{\theta}\vec{u}$$

d'où :

$$\boxed{[\vartheta(T/R_0)] = \left\{\begin{array}{l}\vec{\Omega}(T/R_0) = \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ \vec{V}(G/R_0) = -R\dot{\varphi}\vec{x}_0 + L\dot{\theta}\vec{u}\end{array}\right._G}$$

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

R4- La matrice d'inertie en C du disque *(D)* relativement à la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est :

$$M_C^{(D)} = \begin{pmatrix} \frac{m_1 R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 R^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

en effet : $A = B = C/2$

et $C = \int_{P\in(D)} (x^2 + y^2)dm = \sigma \int r^2 .rdrd\theta = \frac{m_1}{\pi R^2}\int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{m_1 R^2}{2}$

Il faut aussi préciser que le disque admet l'axe $(C,\vec{z}_0)$ comme axe de symétrie de révolution.

R5- La matrice d'inertie en G de la tige *(T)* relativement à la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ est :

$$\boxed{M_G^{(T)} = \begin{pmatrix} \frac{m_2L^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2L^2}{3} \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)}}$$

en effet, si P est un point de *(T)* alors P a pour coordonnées $P(0, v, 0)$ dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$. Par conséquent : $B = 0$ et tous les produits d'inertie sont nuls.

par ailleurs :

$$A = C = \int_{P\in(T)} v^2 dm = \lambda \int_{-L}^{L} v^2 dv = \frac{m_2}{2L}.2\frac{L^3}{3} = \frac{m_2L^2}{3}$$

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

R6- Le torseur cinétique en G de la tige *(T)* dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$[C(T/R_0)] = {}_G\begin{cases} m_2\vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}_G(T/R_0) \end{cases}$$

avec

$$\vec{\sigma}_G(T/R_0) = M_G^{(T)}\vec{\Omega}(T/R_0) = \begin{pmatrix} \frac{m_2L^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2L^2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{m_2L^2}{3}\dot{\theta}\vec{z}_0$$

d'où :

$$\boxed{[C(T/R_0)] = {}_G\begin{cases} m_2\vec{V}(G/R_0) = m_2(-R\dot{\varphi}\vec{x}_0 + L\dot{\theta}\vec{u}) \\ \vec{\sigma}_G(T/R_0) = \frac{m_2L^2}{3}\dot{\theta}\vec{z}_0 \end{cases}}$$

R7- Le torseur dynamique en G de la tige *(T)* par rapport à (R_0) est :

$$[D(T/R_0)] = {}_G\begin{cases} m_2\vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}_G(T/R_0) \end{cases}$$

avec

$$\vec{\Gamma}(G/R_0)=\left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right]_{R_0}=\left[\frac{d(-R\dot{\varphi}\vec{x}_0+L\dot{\theta}\vec{u})}{dt}\right]_{R_0}=-R\ddot{\varphi}\vec{x}_0+L\ddot{\theta}\vec{u}+L\dot{\theta}\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_0}$$

$$=-R\ddot{\varphi}\vec{x}_0+L\ddot{\theta}\vec{u}+L\dot{\theta}(\dot{\theta}\vec{z}_0\wedge\vec{u})=-R\ddot{\varphi}\vec{x}_0+L\ddot{\theta}\vec{u}+L\dot{\theta}^2\vec{v}=-R\ddot{\varphi}\vec{x}_0+L(\ddot{\theta}\vec{u}+\dot{\theta}^2\vec{v})$$

et $\vec{\delta}_G(D/R_0)=\left[\dfrac{d\vec{\sigma}_G(T/R_0)}{dt}\right]_{R_0}=\dfrac{m_2L^2}{3}\ddot{\theta}\vec{z}_0$

d'où :

$$\boxed{[\mathrm{D}(T/R_0)]=\left\{\begin{array}{l}m_2\vec{\Gamma}(G/R_0)=m_2[-R\ddot{\varphi}\vec{x}_0+L(\ddot{\theta}\vec{u}+\dot{\theta}^2\vec{v})]\\ \vec{\delta}_G(T/R_0)=\dfrac{m_2L^2}{3}\ddot{\theta}\vec{z}_0\end{array}\right._G}$$

R8- Le torseur cinétique en C du disque *(D)* par rapport à (R_0) est :

$$[\mathrm{C}(D/R_0)]=\left\{\begin{array}{l}m_1\vec{V}(C/R_0)\\ \vec{\sigma}_C(D/R_0)\end{array}\right._C$$

avec

$$\vec{\sigma}_C(D/R_0)=M_C^{(D)}\vec{\Omega}(D/R_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{m_1R^2}{4} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{m_1R^2}{4} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{m_1R^2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix}=\frac{m_1R^2}{2}\dot{\varphi}\vec{z}_0 ;$$

d'où

$$\boxed{[\mathrm{C}(D/R_0)]=\left\{\begin{array}{l}m_1\vec{V}(C/R_0)=-m_1R\dot{\varphi}\vec{x}_0\\ \vec{\sigma}_C(D/R_0)=\dfrac{m_1R^2}{2}\dot{\varphi}\vec{z}_0\end{array}\right._C}$$

R9- Le torseur dynamique en C du disque *(D)* par rapport à (R_0) est :

$$[\mathrm{D}(D/R_0)]=\left\{\begin{array}{l}m_1\vec{\Gamma}(C/R_0)\\ \vec{\delta}_C(D/R_0)\end{array}\right._C$$

avec

$$\vec{\Gamma}(C/R_0)=\left[\frac{d\vec{V}(C/R_0)}{dt}\right]_{R_0}=\left[\frac{d(-R\dot{\varphi}\vec{x}_0)}{dt}\right]_{R_0}=-R\ddot{\varphi}\vec{x}_0$$

et $\vec{\delta}_C(D/R_0)=\left[\dfrac{d\vec{\sigma}_C(D/R_0)}{dt}\right]_{R_0}=\dfrac{m_1R^2}{2}\ddot{\varphi}\vec{z}_0$

d'où :

$$[D(D/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} m_1\vec{\Gamma}(C/R_0) = -m_1 R\ddot{\varphi}\vec{x}_0 \\ \vec{\delta}_C(D/R_0) = \dfrac{m_1 R^2}{2}\ddot{\varphi}\vec{z}_0 \end{array} \right._C$$

R10- L'énergie cinétique de *(S)* dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$T(S/R_0) = T(D/R_0) + T(T/R_0)$$

$$T(D/R_0) = \frac{1}{2}m_1\vec{V}^2(C/R_0) + \frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(D/R_0)M_C^{(D)}\vec{\Omega}(D/R_0)$$

$$= \frac{1}{2}m_1(-R\dot{\varphi}\vec{x}_0)^2 + \frac{1}{2}(0,0,\dot{\varphi})\begin{pmatrix} \frac{m_1R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1R^2}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}m_1R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m_1R^2}{4}\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}m_1R^2\dot{\varphi}^2$$

$$T(T/R_0) = \frac{1}{2}m_2\vec{V}^2(G/R_0) + \frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(T/R_0)M_G^{(T)}\vec{\Omega}(T/R_0)$$

$$= \frac{1}{2}m_2(-R\dot{\varphi}\vec{x}_0 + L\dot{\theta}\vec{u})^2 + \frac{1}{2}(0,0,\dot{\theta})\begin{pmatrix} \frac{m_2L^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2L^2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}m_2(R^2\dot{\varphi}^2 + L^2\dot{\theta}^2 - 2LR\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta) + \frac{m_2L^2}{6}\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}m_2(R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{4}{3}L^2\dot{\theta}^2 - 2LR\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)$$

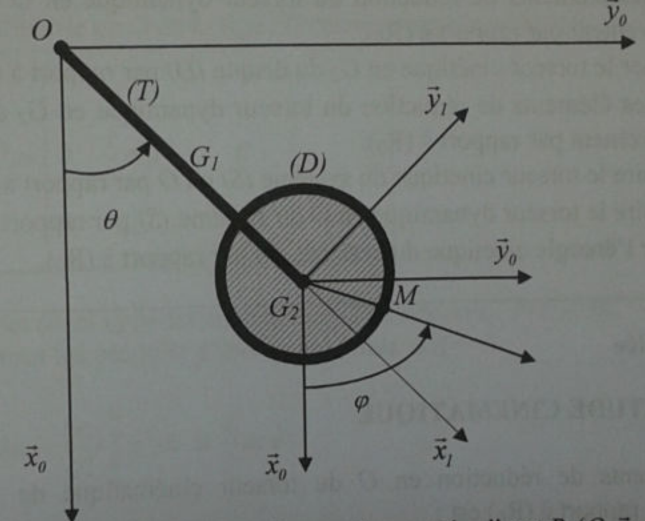
d'où :

$$\boxed{\begin{array}{l} T(S/R_0) = T(D/R_0) + T(T/R_0) \\ = \dfrac{3}{4}m_1R^2\dot{\varphi}^2 + \dfrac{1}{2}m_2(R^2\dot{\varphi}^2 + \dfrac{4}{3}L^2\dot{\theta}^2 - 2LR\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta) \end{array}}$$

Problème n° 4 : mouvement d'un disque articulé à une tige

Notions abordées

- **Centre d'inertie**
- **Torseur cinématique**
- **Matrice d'inertie**
- **Torseur cinétique**
- **Torseur dynamique**
- **Energie cinétique**



Dans le plan $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ d'un repère orthonormé direct $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, on considère le mouvement d'un système *(S)* constitué d'une tige *(T)* rectiligne homogène, de masse m_1, de centre d'inertie G_1 et de longueur $2l$ et d'un disque *(D)* homogène de masse m_2, de rayon R articulé à la tige en son centre d'inertie G_2 et pouvant tourner autour de son axe $(G_2,\vec{z}_0)$.

Le repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ est lié à la tige *(T)* et la position de cette dernière dans (R_0) est repérée par l'angle $\theta = (\vec{x}_0,\vec{x}_1)$ quant à la position du disque *(D)* dans (R_0) elle est donnée par l'angle $\varphi = (\vec{x}_0,\overrightarrow{G_2M})$ où M est un point de *(D)* situé sur sa périphérie (voir figure).

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

Q1- Déterminer les éléments de réduction en O du torseur cinématique de *(T)* dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q2- Déterminer les éléments de réduction en G_2 du torseur cinématique de *(D)* dans son mouvement par rapport à (R_0).

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

Q3- Déterminer la position du centre d'inertie G du système *(S)*.

Q4- Calculer la matrice d'inertie en O de la tige *(T)* relativement à la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Q5- Calculer la matrice d'inertie en G_2 du disque *(D)* relativement à la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

Q6- Déterminer le torseur cinétique en O de la tige *(T)* par rapport à (R_0).

Q7- Donner les éléments de réduction du torseur dynamique en O de la tige *(T)* dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q8- Déterminer le torseur cinétique en G_2 du disque *(D)* par rapport à (R_0).

Q9- Donner les éléments de réduction du torseur dynamique en G_2 du disque *(D)* dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q10- En déduire le torseur cinétique du système *(S)* en O par rapport à (R_0).

Q11- En déduire le torseur dynamique en O du système *(S)* par rapport à (R_0).

Q12- Calculer l'énergie cinétique du système *(S)* par rapport à (R_0).

Solution détaillée

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

R1- Les éléments de réduction en O du torseur cinématique de *(T)* dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$\boxed{[\mathcal{G}(T/R_0)] = {}_O\begin{cases}\vec{\Omega}(T/R_0) = \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ \vec{V}(O/R_0) = \vec{0}\end{cases}}$$

R2- Les éléments de réduction en G_2 du torseur cinématique de *(D)* dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$[\mathcal{G}(D/R_0)] = {}_{G_2}\begin{cases}\vec{\Omega}(D/R_0) \\ \vec{V}(G_2/R_0)\end{cases}$$

avec

$$\vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\varphi}\vec{z}_0$$

et

$$\vec{V}(G_2/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OG_2}}{dt}\right]_{R_0} = 2l\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_{R_0} = 2l(\dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1) = 2l\dot{\theta}\vec{y}_1$$

d'où :

$$\left[\vartheta(D/R_0)\right] = \underset{G_2}{\left\{\begin{array}{l}\vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\varphi}\vec{z}_0 \\ \vec{V}(G_2/R_0) = 2l\dot{\theta}\vec{y}_1\end{array}\right.}$$

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

R3- La position du centre d'inertie G du système *(S)* est donnée par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 l\vec{x}_1 + 2m_2 l\vec{x}_1}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + 2m_2)}{m_1 + m_2} l\vec{x}_1$$

R4- La matrice d'inertie en O de la tige *(T)* relativement à la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est :

$$M_O^{(T)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}m_1 l^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}m_1 l^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

en effet, si P est un point appartenant à la tige *(T)* alors on a : $P(x, 0, 0)$.
Par conséquent, tous les produits d'inertie sont nuls et $A = 0$.
Par ailleurs :

$$B = C = \int_{P\in(T)} x^2 dm = \frac{m_1}{2l}\int_0^{2l} x^2 dx = \frac{4}{3}m_1 l^2$$

R5- La matrice d'inertie en G_2 du disque *(D)* relativement à la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est :

$$M_{G_2}^{(D)} = \begin{pmatrix} \frac{m_2 R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 R^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

en effet le disque admet l'axe $(G_2, \vec{z}_0)$ comme axe de révolution, ce qui permet d'affirmer que la matrice d'inertie en G_2 du disque *(D)* relativement à la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est de la forme :

$$M_{G_2}^{(D)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

avec $C = \frac{A}{2} = \int_{P \in (D)} r^2 dm = \sigma \int_{P \in (D)} r^2 .rdrd\theta = \frac{m_2}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{m_2 R^2}{2}$

où $P(x, y, 0)$ est un point de (D).

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

R6- Le torseur cinétique en O de la tige (T) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$[C(T/R_0)] = {}_O\begin{cases} m_1 \vec{V}(G_1/R_0) \\ \vec{\sigma}_O(T/R_0) \end{cases}$$

avec :

$$\vec{V}(G_1/R_0) = \vec{V}(O/R_0) + \vec{\Omega}(T/R_0) \wedge \overrightarrow{OG_1} = \dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge l\vec{x}_1 = l\dot{\theta}\vec{y}_1$$

et

$$\vec{\sigma}_O(T/R_0) = M_O^{(T)} \vec{\Omega}(T/R_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}m_1 l^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}m_1 l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{4}{3} m_1 l^2 \dot{\theta} \vec{z}_0$$

d'où :

$$\boxed{[C(T/R_0)] = {}_O\begin{cases} m_1 \vec{V}(G_1/R_0) = m_1 l \dot{\theta} \vec{y}_1 \\ \vec{\sigma}_O(T/R_0) = \frac{4}{3} m_1 l^2 \dot{\theta} \vec{z}_0 \end{cases}}$$

R7- Les éléments de réduction du torseur dynamique en O de la tige (T) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$[D(T/R_0)] = {}_O\begin{cases} m_1 \vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}_O(D/R_0) \end{cases}$$

avec

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(G_1/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d(l\dot{\theta}\vec{y}_1)}{dt}\right]_{R_0} = l\ddot{\theta}\vec{y}_1 + l\dot{\theta}\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_0} = -l\dot{\theta}^2\vec{x}_1 + l\ddot{\theta}\vec{y}_1 = l(-\dot{\theta}^2\vec{x}_1 + \ddot{\theta}\vec{y}_1)$$

et

$$\vec{\delta}_O(D/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_O(T/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \frac{4}{3} m_1 l^2 \ddot{\theta} \vec{z}_0$$

d'où :

$$[D(T/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} m_1\vec{\Gamma}(G/R_0) = m_1 l(-\dot{\theta}^2\vec{x}_1 + \ddot{\theta}\vec{y}_1) \\ \vec{\delta}_O(D/R_0) = \dfrac{4}{3} m_1 l^2 \ddot{\theta}\vec{z}_0 \end{array} \right._O$$

R8- Le torseur cinétique en G_2 du disque *(D)* dans son mouvement par rapport à (R_0)

est : $$[C(D/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} m_2\vec{V}(G_2/R_0) \\ \vec{\sigma}_{G_2}(D/R_0) \end{array} \right._{G_2}$$

avec :

$$\vec{\sigma}_{G_2}(D/R_0) = M_{G_2}^{(D)}.\vec{\Omega}(D/R_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{m_2R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{m_2R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m_2R^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{m_2R^2}{2}\dot{\varphi}\vec{z}_0$$

d'où :

$$[C(D/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} m_2\vec{V}(G_2/R_0) = 2m_2 l\dot{\theta}\vec{y}_1 \\ \vec{\sigma}_{G_2}(D/R_0) = \dfrac{m_2R^2}{2}\dot{\varphi}\vec{z}_0 \end{array} \right._{G_2}$$

R9- Les éléments de réduction du torseur dynamique en G_2 du disque *(D)* dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$[D(D/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} m_2\vec{\Gamma}(G_2/R_0) \\ \vec{\delta}_{G_2}(D/R_0) \end{array} \right._{G_2}$$

avec :

$$\vec{\Gamma}(G_2/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(G_2/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\,2l\dot{\theta}\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_0} = 2l\ddot{\theta}\vec{y}_1 + 2l\dot{\theta}\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_0}$$

$$= 2l\ddot{\theta}\vec{y}_1 + 2l\dot{\theta}(\dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge \vec{y}_1) = 2l(-\dot{\theta}^2\vec{x}_1 + \ddot{\theta}\vec{y}_1)$$

Et

$$\vec{\delta}_{G_2}(D/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_{G_2}(D/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \frac{m_2R^2}{2}\ddot{\varphi}\vec{z}_0$$

d'où :

$$[D(D/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} m_2\vec{\Gamma}(G_2/R_0) = 2m_2 l(-\dot{\theta}^2\vec{x}_1 + \ddot{\theta}\vec{y}_1) \\ \vec{\delta}_{G_2}(D/R_0) = \dfrac{m_2R^2}{2}\ddot{\varphi}\vec{z}_0 \end{array} \right._{G_2}$$

R10- Le torseur cinétique du système *(S)* en *O* dans son mouvement par rapport à (R_0) est : $[C(S/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} (m_1+m_2)\vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}_O(S/R_0) \end{array} \right._O$

Calcul de $\vec{V}(G/R_0)$

on a : $\overrightarrow{OG} = \frac{(m_1+2m_2)}{m_1+m_2} l\vec{x}_1$

$$\Rightarrow \vec{V}(G/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{R_0} = \frac{(m_1+2m_2)}{m_1+m_2} l \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_{R_0} = \frac{(m_1+2m_2)}{m_1+m_2} l(\dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1) = \frac{(m_1+2m_2)}{m_1+m_2} l\dot{\theta}\vec{y}_1$$

Calcul de $\vec{\sigma}_O(S/R_0)$

$$\vec{\sigma}_O(S/R_0) = \vec{\sigma}_O(T/R_0) + \vec{\sigma}_O(D/R_0)$$

Il faut donc calculer $\vec{\sigma}_O(D/R_0)$

$$\vec{\sigma}_O(D/R_0) = \vec{\sigma}_{G_2}(D/R_0) + m_2\vec{V}(G_2/R_0) \wedge \overrightarrow{G_2O}$$

$$m_2\vec{V}(G_2/R_0) \wedge \overrightarrow{G_2O} = 2m_2 l\dot{\theta}\vec{y}_1 \wedge (-2l\vec{x}_1) = 4m_2 l^2\dot{\theta}\vec{z}_0$$

donc :

$$\vec{\sigma}_O(D/R_0) = \frac{m_2R^2}{2}\dot{\varphi}\vec{z}_0 + 4m_2l^2\dot{\theta}\vec{z}_0 = (\frac{m_2R^2}{2}\dot{\varphi} + 4m_2l^2\dot{\theta})\vec{z}_0$$

par suite, il vient :

$$\vec{\sigma}_O(S/R_0) = \vec{\sigma}_O(T/R_0) + \vec{\sigma}_O(D/R_0) = \frac{4}{3}m_1l^2\dot{\theta}\vec{z}_0 + (\frac{m_2R^2}{2}\dot{\varphi} + 4m_2l^2\dot{\theta})\vec{z}_0$$

$$= [4(m_2 + \frac{m_1}{3})l^2\dot{\theta} + \frac{m_2R^2}{2}\dot{\varphi}]\vec{z}_0$$

d'où :

$$\boxed{[C(S/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} (m_1+m_2)\vec{V}(G/R_0) = (m_1+2m_2)l\dot{\theta}\vec{y}_1 \\ \vec{\sigma}_O(S/R_0) = [4(m_2+\frac{m_1}{3})l^2\dot{\theta} + \frac{m_2R^2}{2}\dot{\varphi}]\vec{z}_0 \end{array} \right._O}$$

R11- Le torseur dynamique en *O* du système *(S)* dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$[D(S/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} (m_1+m_2)\vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}_O(S/R_0) \end{array} \right._O$$

avec

$$\vec{\Gamma}(G/R_0)=\left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right]_{R_0}=\frac{(m_1+2m_2)l}{(m_1+m_2)}\left[\frac{d(\dot{\theta}\vec{y}_1)}{dt}\right]_{R_0}=\frac{(m_1+2m_2)l}{(m_1+m_2)}\ddot{\theta}\vec{y}_1+\frac{(m_1+2m_2)l}{(m_1+m_2)}\dot{\theta}\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_0}$$

$$=\frac{(m_1+2m_2)l}{(m_1+m_2)}\ddot{\theta}\vec{y}_1+\frac{(m_1+2m_2)l}{(m_1+m_2)}\dot{\theta}(\dot{\theta}\vec{z}_0\wedge\vec{y}_1)=\frac{(m_1+2m_2)l}{(m_1+m_2)}\ddot{\theta}\vec{y}_1-\frac{(m_1+2m_2)l}{(m_1+m_2)}\dot{\theta}^2\vec{x}_1$$

$$=\frac{(m_1+2m_2)l}{(m_1+m_2)}(\ddot{\theta}\vec{y}_1-\dot{\theta}^2\vec{x}_1)$$

$$\vec{\delta}_O(S/R_0)=\left[\frac{d\vec{\sigma}_O(S/R_0)}{dt}\right]_{R_0}=[4(m_2+\frac{m_1}{3})l^2\ddot{\theta}+\frac{m_2R^2}{2}\ddot{\varphi}]\vec{z}_0$$

d'où :

$$\boxed{[\mathrm{D}(S/R_0)]=\left\{\begin{array}{l}(m_1+m_2)\vec{\Gamma}(G/R_0)=(m_1+2m_2)l(\ddot{\theta}\vec{y}_1-\dot{\theta}^2\vec{x}_1)\\ \vec{\delta}_O(S/R_0)=[4(m_2+\frac{m_1}{3})l^2\ddot{\theta}+\frac{m_2R^2}{2}\ddot{\varphi}]\vec{z}_0\end{array}\right._{O}}$$

R12- L'énergie cinétique du système *(S)* dans mouvement par rapport à (R_0) est :

$$T(S/R_0)=T(T/R_0)+T(D/R_0)$$

$$T(T/R_0)=\frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(T/R_0)M_O^{(T)}\vec{\Omega}(T/R_0)=\frac{1}{2}(0,0,\dot{\theta})\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\frac{4}{3}m_1l^2&0\\0&0&\frac{4}{3}m_1l^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{pmatrix}=\frac{2}{3}m_1l^2\dot{\theta}^2$$

$$T(D/R_0)=\frac{1}{2}m_2\vec{V}^2(G_2/R_0)+\frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(D/R_0)M_{G_2}^{(D)}\vec{\Omega}(D/R_0)$$

$$=\frac{1}{2}m_2(2l\dot{\theta}\vec{y}_1)^2+\frac{1}{2}(0,0,\dot{\varphi})\begin{pmatrix}\frac{m_2R^2}{4}&0&0\\0&\frac{m_2R^2}{4}&0\\0&0&\frac{m_2R^2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\varphi}\end{pmatrix}=2m_2l^2\dot{\theta}^2+\frac{m_2R^2}{4}\dot{\varphi}^2$$

d'où :

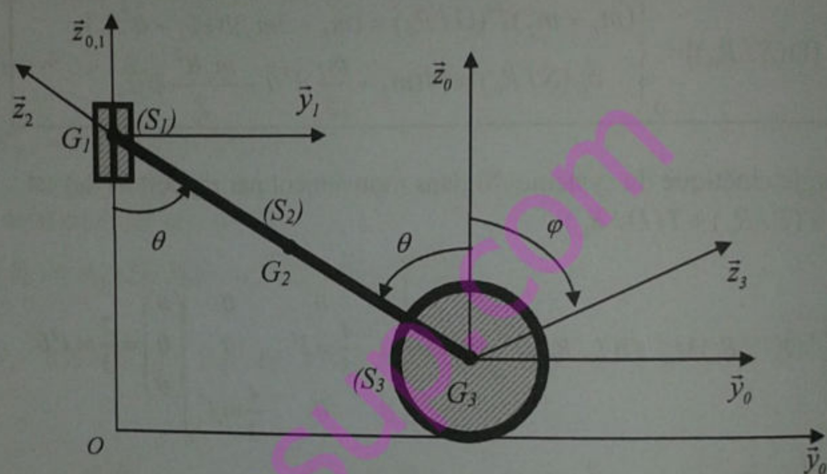
$$\boxed{\begin{array}{l}T(S/R_0)=T(T/R_0)+T(D/R_0)=\frac{2}{3}m_1l^2\dot{\theta}^2+2m_2l^2\dot{\theta}^2+\frac{m_2R^2}{4}\dot{\varphi}^2\\ =2(m_2+\frac{m_1}{3})l^2\dot{\theta}^2+\frac{m_2R^2}{4}\dot{\varphi}^2\end{array}}$$

Problème n° 5 : système composé d'un coulisseau, d'un disque et d'une tige

Notions abordées

- **Torseur cinématique**
- **Matrice d'inertie**
- **Torseur cinétique**
- **Torseur dynamique**
- **Energie cinétique**

Soit le système mécanique (Σ) composé des solides suivants :



- (S_1) est un coulisseau de masse m_1, de centre d'inertie G_1 lié au repère $R_1(G_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ en mouvement de translation rectiligne, suivant l'axe $\vec{z}_0$, par rapport au repère fixe $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ pris comme repère de référence.
- (S_2) est une tige rectiligne homogène de longueur $2l$, de masse m_2 et de centre d'inertie G_2 lié à $R_2(G_2,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$.
- (S_3) est un disque homogène de rayon R, de masse m_3 et de centre d'inertie G_3 lié à $R_3(G_3,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$.

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

Q1- Déterminer le torseur cinématique en G_1 du solide (S_1) par rapport à (R_0).
Q2- Déterminer le torseur cinématique en G_2 du solide (S_2) par rapport à (R_0).
Q3- Déterminer le torseur cinématique en G_3 du solide (S_3) par rapport à (R_0).

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

Q4- Déterminer la matrice d'inertie en G_2 de (S_2) relativement à la base $(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$.
Q5- Déterminer la matrice d'inertie en G_3 de (S_3) relativement à la base $(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$.

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

Q6- Donner les éléments de réduction en G_1 du torseur cinétique de (S_1) dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q7- Donner les éléments de réduction en G_2 du torseur cinétique de (S_2) dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q8- Donner les éléments de réduction en G_3 du torseur cinétique de (S_3) dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q9- Déterminer les éléments de réduction en G_1 du torseur dynamique de (S_1) dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q10- Déterminer les éléments de réduction en G_2 du torseur dynamique de (S_2) dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q11- Déterminer les éléments de réduction en G_3 du torseur dynamique de (S_3) dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q12- En déduire le moment dynamique en G_1 du système (Σ) par rapport à (R_0).

Q13- Calculer l'énergie cinétique du système (Σ) par rapport à (R_0).

Solution détaillée

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

R1- Le torseur cinématique en G_1 du solide (S_1) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$[\vartheta(S_1/R_0)] = {}_{G_1}\begin{cases}\vec{\Omega}(S_1/R_0)\\ \vec{V}(G_1/R_0)\end{cases}$$

avec :

$\vec{\Omega}(S_1/R_0)=\vec{0}$ car (S_1) a un mouvement de translation.

et $\vec{V}(G_1/R_0)=\left[\dfrac{d\overline{OG_1}}{dt}\right]_{R_0}=\left[\dfrac{d(R+2l\cos\theta)\vec{z}_0)}{dt}\right]_{R_0}=-2l\dot{\theta}\sin\theta\vec{z}_0$

d'où :

$$\boxed{[\vartheta(S_1/R_0)] = {}_{G_1}\begin{cases}\vec{\Omega}(S_1/R_0)=\vec{0}\\ \vec{V}(G_1/R_0)=-2l\dot{\theta}\sin\theta\vec{z}_0\end{cases}}$$

R2- Le torseur cinématique en G_2 du solide (S_2) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$[\vartheta(S_2/R_0)] = {}_{G_1}\begin{cases}\vec{\Omega}(S_2/R_0)\\ \vec{V}(G_2/R_0)\end{cases}$$

avec :

$$\vec{\Omega}(S_2/R_0) = \dot{\theta}\vec{x}_0$$

et

$$\vec{V}(G_2/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OG_2}}{dt}\right]_{R_0}$$

$$\overrightarrow{OG_2} = \overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{G_1G_2} = (R + 2l\cos\theta)\vec{z}_0 - l\vec{z}_2 = l\sin\theta\vec{y}_0 + (R + l\cos\theta)\vec{z}_0$$

car $\vec{z}_2 = \cos\theta\vec{z}_0 - \sin\theta\vec{y}_0$

ce qui donne :

$$\vec{V}(G_2/R_0) = l\dot{\theta}\cos\theta\vec{y}_0 - l\dot{\theta}\sin\theta\vec{z}_0 = l\dot{\theta}(\cos\theta\vec{y}_0 - \sin\theta\vec{z}_0)$$

d'où :

$$\boxed{[\vartheta(S_2/R_0)] = \underset{G_1}{\left\{\begin{array}{l}\vec{\Omega}(S_2/R_0) = \dot{\theta}\vec{x}_0 \\ \vec{V}(G_2/R_0) = l\dot{\theta}(\cos\theta\vec{y}_0 - \sin\theta\vec{z}_0)\end{array}\right.}}$$

R3- Le torseur cinématique en G_3 du solide (S_3) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$[\vartheta(S_3/R_0)] = \underset{G_3}{\left\{\begin{array}{l}\vec{\Omega}(S_3/R_0) \\ \vec{V}(G_3/R_0)\end{array}\right.}$$

avec :

$$\vec{\Omega}(S_3/R_0) = -\dot{\varphi}\vec{x}_0$$

et

$$\vec{V}(G_3/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OG_3}}{dt}\right]_{R_0}$$

$$\overrightarrow{OG_3} = \overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{G_1G_3} = (R + 2l\cos\theta)\vec{z}_0 - 2l\vec{z}_2 = 2l\sin\theta\vec{y}_0 + R\vec{z}_0$$

car

$$\vec{z}_2 = \cos\theta\vec{z}_0 - \sin\theta\vec{y}_0$$

ce qui donne :

$$\vec{V}(G_3/R_0) = 2l\dot{\theta}\cos\theta\vec{y}_0$$

d'où :

$$\boxed{[\vartheta(S_3/R_0)] = \underset{G_3}{\left\{\begin{array}{l}\vec{\Omega}(S_3/R_0) = -\dot{\varphi}\vec{x}_0 \\ \vec{V}(G_3/R_0) = 2l\dot{\theta}\cos\theta\vec{y}_0\end{array}\right.}}$$

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

R4- La matrice d'inertie en G_2 de (S_2) relativement à la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est :

$$\boxed{M_{G_2}^{(S_2)} = \begin{pmatrix} \frac{m_2 l^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 l^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{R_2}}$$

en effet : si P est un point de (S_2), alors P a pour coordonnées dans (R_2) : $P\ (0, 0, z)$.

donc $C_2 = 0$ et $A_2 = B_2 = \int_{P\in(S_2)} z^2 dm = \lambda \int_{-l}^{l} z^2 dz = \frac{m_2 l^2}{3}$ car $\lambda = \frac{m_2}{2l}$

R5- La matrice d'inertie en G_3 de (S_3) relativement à la base $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ est :

$$\boxed{M_{G_3}^{(S_3)} = \begin{pmatrix} \frac{m_3 R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_3 R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3 R^2}{4} \end{pmatrix}_{R_3}}$$

car l'axe $(G_3, \vec{x}_3)$ est un axe de symétrie de révolution. En plus on a : $A = B = \frac{C}{2}$.

Si P est un point de (S_3), alors P a pour coordonnées dans (R_3) : $P\ (0, y, z)$

$$\Rightarrow A = \int_{P\in(S_3)} (y^2 + z^2) dm = \sigma \int_{P\in(S_3)} r^2 dS = \sigma \int_{P\in(S_3)} r^2 .r dr d\theta = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{m_3 R^2}{2}$$

car $\sigma = \frac{m_3}{\pi R^2}$.

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

R6- Les éléments de réduction en G_1 du torseur cinétique de (S_1) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$\boxed{[C(S_1/R_0)] = \begin{cases} m_1 \vec{V}(G_1/R_0) = -2lm_1 \dot{\theta} \sin\theta \vec{z}_0 \\ \vec{\sigma}_{G_1}(S_1/R_0) = \vec{0} \end{cases}_{G_1}}$$

car $\vec{\Omega}(S_1/R_0) = \vec{0}$

R7- Les éléments de réduction en G_2 du torseur cinétique de *(S_2)* dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$[C(S_2/R_0)] = \left\{\begin{matrix} m_2\vec{V}(G_2/R_0) \\ \vec{\sigma}_{G_2}(S_2/R_0) \end{matrix}\right._{G_2}$$

avec :

$$\vec{\sigma}_{G_2}(S_2/R_0) = M_{G_2}^{(S_2)}.\vec{\Omega}(S_2/R_0) = \begin{pmatrix} \frac{m_2 l^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 l^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{m_2 l^2}{3}\dot{\theta}\vec{x}_0$$

d'où :

$$\boxed{[C(S_2/R_0)] = \left\{\begin{matrix} m_2\vec{V}(G_2/R_0) = m_2 l\dot{\theta}(\cos\theta\vec{y}_0 - \sin\theta\vec{z}_0) \\ \vec{\sigma}_{G_2}(S_2/R_0) = \frac{m_2 l^2}{3}\dot{\theta}\vec{x}_0 \end{matrix}\right._{G_2}}$$

R8- Les éléments de réduction en G_3 du torseur cinétique de *(S_3)* dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$[C(S_3/R_0)] = \left\{\begin{matrix} m_3\vec{V}(G_3/R_0) \\ \vec{\sigma}_{G_3}(S_3/R_0) \end{matrix}\right._{G_3}$$

avec :

$$\vec{\sigma}_{G_3}(S_3/R_0) = M_{G_3}^{(S_3)}.\vec{\Omega}(S_3/R_0) = \begin{pmatrix} \frac{m_3 R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_3 R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3 R^2}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{m_3 R^2}{2}\dot{\varphi}\vec{x}_0$$

d'où :

$$\boxed{[C(S_3/R_0)] = \left\{\begin{matrix} m_3\vec{V}(G_3/R_0) = 2m_3 l\dot{\theta}\cos\theta\vec{y}_0 \\ \vec{\sigma}_{G_3}(S_3/R_0) = -\frac{m_3 R^2}{2}\dot{\varphi}\vec{x}_0 \end{matrix}\right._{G_3}}$$

R9- Les éléments de réduction en G_1 du torseur dynamique de *(S_1)* dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$[D(S_1/R_0)] = \underset{G_1}{\begin{cases} m_1\vec{\Gamma}(G_1/R_0) \\ \vec{\delta}_{G_1}(S_1/R_0) \end{cases}}$$

avec :

$$\vec{\Gamma}(G_1/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(G_1/R_0)}{dt}\right] = \left[\frac{d(-2l\dot{\theta}\sin\theta\vec{z}_0)}{dt}\right]_{R_0} = -2l(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{z}_0$$

et

$$\vec{\delta}_{G_1}(S_1/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_{G_1}(S_1/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \vec{0} \text{ car } \vec{\sigma}_{G_1}(S_1/R_0) = \vec{0}$$

R10- Déterminons les éléments de réduction en G_2 du torseur dynamique de *(S_2)* dans son mouvement par rapport à (R_0) :

$$[D(S_2/R_0)] = \underset{G_2}{\begin{cases} m_2\vec{\Gamma}(G_2/R_0) \\ \vec{\delta}_{G_2}(S_2/R_0) \end{cases}}$$

avec :

$$\vec{\Gamma}(G_2/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(G_2/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d[l\dot{\theta}(\cos\theta\vec{y}_0 - \sin\theta\vec{z}_0)]}{dt}\right]_{R_0}$$

$$= l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\vec{y}_0 - l(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{z}_0$$

et

$$\vec{\delta}_{G_2}(S_2/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_{G_2}(S_2/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \frac{m_2l^2}{3}\ddot{\theta}\vec{x}_0$$

d'où :

$$\boxed{[D(S_2/R_0)] = \underset{G_2}{\begin{cases} m_2\vec{\Gamma}(G_2/R_0) = m_2l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\vec{y}_0 - m_2l(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{z}_0 \\ \vec{\delta}_{G_2}(S_2/R_0) = \dfrac{m_2l^2}{3}\ddot{\theta}\vec{x}_0 \end{cases}}}$$

R11- Déterminons les éléments de réduction en G_3 du torseur dynamique de *(S_3)* dans son mouvement par rapport à (R_0) :

$$[D(S_3/R_0)] = \underset{G_3}{\begin{cases} m_3\vec{\Gamma}(G_3/R_0) \\ \vec{\delta}_{G_3}(S_3/R_0) \end{cases}}$$

avec :

$$\vec{\Gamma}(G_3/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(G_3/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d(2l\dot{\theta}\cos\theta\vec{y}_0)}{dt}\right]_{R_0} = 2l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\vec{y}_0$$

et

$$\vec{\delta}_{G_3}(S_3/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_{G_3}(S_3/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = -\frac{m_3R^2}{2}\ddot{\varphi}\vec{x}_0$$

d'où :

$$\boxed{[D(S_3/R_0)] = \left\{\begin{array}{l} m_3\vec{\Gamma}(G_3/R_0) = 2m_3l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\vec{y}_0 \\ \vec{\delta}_{G_3}(S_3/R_0) = -\dfrac{m_3R^2}{2}\ddot{\varphi}\vec{x}_0 \end{array}\right._{G_3}}$$

R12- Le moment dynamique en G_1 du système (Σ) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$\vec{\delta}_{G_1}(\Sigma/R_0) = \vec{\delta}_{G_1}(S_1/R_0) + \vec{\delta}_{G_1}(S_2/R_0) + \vec{\delta}_{G_1}(S_3/R_0)$$

$$\vec{\delta}_{G_1}(S_1/R_0) = \vec{0} \text{ car } \vec{\sigma}_{G_1}(S_1/R_0) = \vec{0}$$

$$\vec{\delta}_{G_1}(S_2/R_0) = \vec{\delta}_{G_2}(S_2/R_0) + m_2\vec{\Gamma}(G_2/R_0) \wedge \overrightarrow{G_2G_1}$$

or

$$\overrightarrow{G_2G_1} = l\vec{z}_2 = l(\cos\theta\vec{z}_0 - \sin\theta\vec{y}_0)$$

ce qui donne :

$$m_2\vec{\Gamma}(G_2/R_0) \wedge \overrightarrow{G_2G_1} = \left|\begin{array}{c} 0 \\ m_2l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) \\ -m_2l(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{c} 0 \\ -l\sin\theta \\ l\cos\theta \end{array}\right.$$

$$= \left|\begin{array}{c} m_2l^2\cos\theta(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) - m_2l^2\sin\theta(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \\ 0 \\ 0 \end{array}\right.$$

$$= \left|\begin{array}{c} m_2l^2\ddot{\theta}\cos 2\theta - m_2l^2\dot{\theta}^2\sin 2\theta \\ 0 \\ 0 \end{array}\right.$$

d'où :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\delta}_{G_1}(S_2/R_0) &= (\frac{m_2 l^2}{3}\ddot{\theta}\vec{x}_0 + m_2 l^2 \ddot{\theta}\cos 2\theta - m_2 l^2 \dot{\theta}^2 \sin 2\theta)\vec{x}_0 \\ &= [\frac{m_2 l^2}{3}\ddot{\theta} + m_2 l^2(\ddot{\theta}\cos 2\theta - \dot{\theta}^2 \sin 2\theta)]\vec{x}_0\end{aligned}}$$

$$\vec{\delta}_{G_1}(S_3/R_0) = \vec{\delta}_{G_3}(S_3/R_0) + m_3\vec{\Gamma}(G_3/R_0)\wedge\overrightarrow{G_3G_1}$$

or

$$\overrightarrow{G_3G_1} = 2l\vec{z}_2 = 2l(\cos\theta\vec{z}_0 - \sin\theta\vec{y}_0)$$

ce qui donne :

$$m_3\vec{\Gamma}(G_3/R_0)\wedge\overrightarrow{G_3G_1} = \left|\begin{matrix}0\\ 2m_3 l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\\ 0\end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix}0\\ -2l\sin\theta\\ 2l\cos\theta\end{matrix}\right.$$

$$= \left|\begin{matrix}4m_3 l^2\cos\theta(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\\ 0\\ 0\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}4m_3 l^2\ddot{\theta}\cos^2\theta - 2m_3 l^2\dot{\theta}^2\sin 2\theta\\ 0\\ 0\end{matrix}\right.$$

d'où :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\delta}_{G_1}(S_3/R_0) &= [-\frac{m_3 R^2}{2}\ddot{\varphi} + 4m_3 l^2\ddot{\theta}\cos^2\theta - 2m_3 l^2\dot{\theta}^2\sin 2\theta]\vec{x}_0 \\ &= [-\frac{m_3 R^2}{2}\ddot{\varphi} + 2m_3 l^2(2\ddot{\theta}\cos^2\theta - \dot{\theta}^2\sin 2\theta)]\vec{x}_0\end{aligned}}$$

soit :

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{\delta}_{G_1}(\Sigma/R_0) = \vec{\delta}_{G_1}(S_1/R_0) + \vec{\delta}_{G_1}(S_2/R_0) + \vec{\delta}_{G_1}(S_3/R_0) \\ &= [\frac{m_2 l^2}{3}\ddot{\theta} - \frac{m_3 R^2}{2}\ddot{\varphi} + m_2 l^2\ddot{\theta}\cos 2\theta - m_2 l^2\dot{\theta}^2\sin 2\theta + 4m_3 l^2\ddot{\theta}\cos^2\theta - 2m_3 l^2\dot{\theta}^2\sin 2\theta]\vec{x}_0 \\ &= [\frac{m_2 l^2}{3}\ddot{\theta} - \frac{m_3 R^2}{2}\ddot{\varphi} + m_2 l^2(\ddot{\theta}\cos 2\theta - \dot{\theta}^2\sin 2\theta) + 2m_3 l^2(2\ddot{\theta}\cos^2\theta - \dot{\theta}^2\sin 2\theta)]\vec{x}_0\end{aligned}}$$

R13- L'énergie cinétique du système (Σ) par rapport à (R_0) est :

$$T(\Sigma/R_0) = T(S_1/R_0) + T(S_2/R_0) + T(S_3/R_0)$$

$$T(S_1/R_0) = \frac{1}{2}m_1\vec{V}^2(G_1/R_0) = 2m_1 l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta$$

$$T(S_2/R_0)=\frac{1}{2}m_2\vec{V}^2(G_2/R_0)+\frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(S_2/R_0)M_{G_2}^{(S_2)}\vec{\Omega}(S_2/R_0)$$

$$=\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}(\dot{\theta},0,0)\begin{pmatrix}\frac{m_2l^2}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{m_2l^2}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}^2+\frac{m_2l^2}{6}\dot{\theta}^2=\frac{2}{3}m_2l^2\dot{\theta}^2$$

$$T(S_3/R_0)=\frac{1}{2}m_3\vec{V}^2(G_3/R_0)+\frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(S_3/R_0)M_{G_3}^{(S_3)}\vec{\Omega}(S_3/R_0)$$

$$=2m_3l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}(-\dot{\varphi},0,0)\begin{pmatrix}\frac{m_3R^2}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{m_3R^2}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{m_3R^2}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\dot{\varphi}\\0\\0\end{pmatrix}=2m_3l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta+\frac{m_3R^2}{4}\dot{\varphi}^2$$

d'où :

$$\boxed{\begin{aligned}&T(\Sigma/R_0)=T(S_1/R_0)+T(S_2/R_0)+T(S_3/R_0)\\&=2m_1l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta+\frac{2}{3}m_2l^2\dot{\theta}^2+2m_3l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta+\frac{m_3R^2}{4}\dot{\varphi}^2\\&=\frac{2}{3}m_2l^2\dot{\theta}^2+\frac{m_3R^2}{4}\dot{\varphi}^2+2l^2\dot{\theta}^2(m_1\sin^2\theta+m_3\cos^2\theta)\end{aligned}}$$

Problème n° 6 : système composé d'un cylindre, d'une tige et d'une sphère

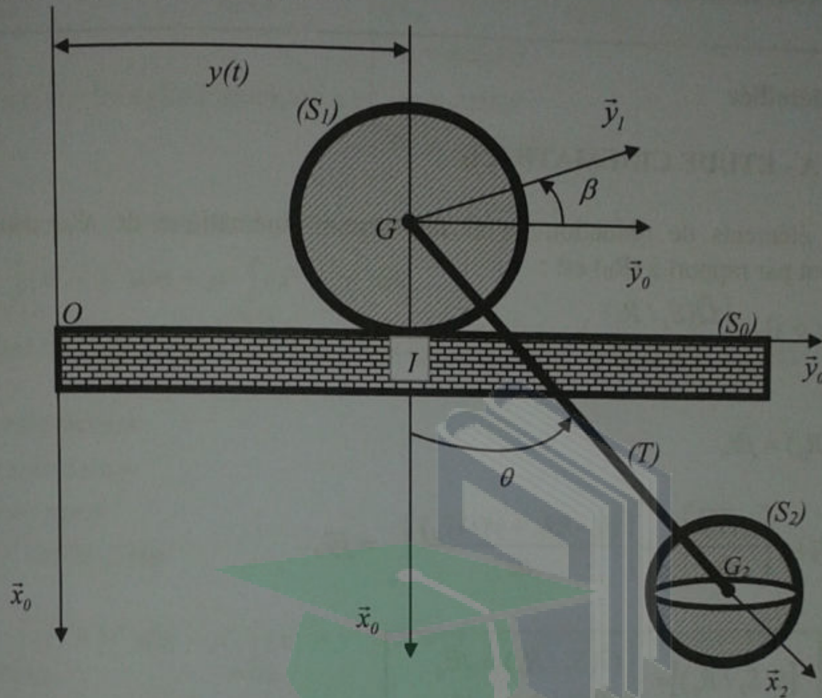
Notions abordées

- **Torseur cinématique**
- **Condition de roulement sans glissement**
- **Moment d'inertie**
- **Torseur cinétique**
- **Torseur dynamique**

Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct lié au sol *(S₀)*. Un pont roulant est modélisé par :

- un cylindre (S_1) qui roule sans glisser sur le sol. Le solide (S_1) a pour centre d'inertie G, pour masse m et pour rayon R. On lui associe le repère $R_1(G,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_{0,1})$. On repère son mouvement par rapport au bâti (S_0) à l'aide du vecteur $\overrightarrow{OG}=-R\vec{x}_0+y(t)\vec{y}_0$ et de l'angle $\beta(t)=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=(\vec{y}_0,\vec{y}_1)$.
- une tige (T) dont on néglige la masse.

- Une sphère *(S₂)* représentant la charge. Elle a pour centre d'inertie G_2, pour masse M et pour rayon r. On lui associe le repère $R_2(G,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_{0,1})$. On pose $\overrightarrow{GG_2} = 4r\vec{x}_2$ et sa rotation par rapport au bâti *(S₀)* est repérée à l'aide de l'angle $\theta(t) = (\vec{x}_0,\vec{x}_2) = (\vec{y}_0,\vec{y}_2)$.



PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

Q1- Déterminer les éléments de réduction en G du torseur cinématique de *(S₁)* dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q2- Traduire la condition de non glissement en I de *(S₁)* et en déduire une relation entre $\dot{y}(t)$ *et* $\dot{\beta}(t)$.

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

Q3- Déterminer le moment d'inertie de *(S₁)* par rapport à l'axe $(G,\vec{z}_0)$.

Q4- Déterminer le moment d'inertie de *(S₂)* par rapport à l'axe $(G_2,\vec{z}_0)$.

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

Q5- Déterminer le torseur cinétique en G du solide *(S₁)* dan son mouvement par rapport à (R_0) en fonction de m, r et $\dot{y}(t)$.

Q6- Déterminer le torseur dynamique en G du solide *(S₁)* dan son mouvement par rapport à (R_0) en fonction de m, r et $\ddot{y}(t)$.

Q7- Déterminer le torseur cinétique en G du solide (S_2) dan son mouvement par rapport à (R_0) en fonction de $M, r, \theta(t), \dot{\theta}(t)$ et $\dot{y}(t)$.

Q8- Déterminer le torseur dynamique en G du solide (S_2) dan son mouvement par rapport à (R_0) en fonction de $M, r, \theta(t), \ddot{\theta}(t)$ et $\ddot{y}(t)$.

Solution détaillée

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

R1- Les éléments de réduction en G du torseur cinématique de (S_1) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$[\vartheta(S_1/R_0)] = {}_G\begin{cases}\vec{\Omega}(S_1/R_0) \\ \vec{V}(G/R_0)\end{cases}$$

avec

$$\vec{\Omega}(S_1/R_0) = \dot{\beta}\vec{z}_0$$

et

$$\vec{V}(G/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d(-R\vec{x}_0 + y(t)\vec{y}_0)}{dt}\right]_{R_0} = \dot{y}\vec{y}_0$$

d'où :

$$\boxed{[\vartheta(S_1/R_0)] = {}_G\begin{cases}\vec{\Omega}(S_1/R_0) = \dot{\beta}\vec{z}_0 \\ \vec{V}(G/R_0) = \dot{y}\vec{y}_0\end{cases}}$$

R2- Le cylindre (S_1) roule sans glisser sur le sol (S_0). La condition de roulement sans glissement est :

$$\vec{V}(I \in S_1/S_0) = \vec{0}$$

or

$$\vec{V}(I \in S_1/R_0) = \vec{V}(G \in S_1/R_0) + \vec{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \overrightarrow{GI}$$

avec

$$\vec{V}(G/R_0) = \dot{y}\vec{y}_0$$

et

$$\vec{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \overrightarrow{GI} = \dot{\beta}\vec{z}_0 \wedge R\vec{x}_0 = R\dot{\beta}\vec{y}_0$$

donc

$$\vec{V}(I \in S_1/R_0) = \dot{y}\vec{y}_0 + R\dot{\beta}\vec{y}_0 = (\dot{y} + R\dot{\beta})\vec{y}_0 = \vec{0}$$

d'où

$$\dot{y} + R\dot{\beta} = 0$$

ou encore :

$$\boxed{\dot{y}(t) = -R\dot{\beta}(t)}$$

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

R3- Le moment d'inertie de *(S₁)* par rapport à l'axe $(G,\vec{z}_0)$ est :

$$I_{Gz_0} = \int_{P\in(S_1)}(x^2+y^2)dm = \rho\int_{P\in(S_1)} r^2 dV = \rho\int_{P\in(S_1)} r^2.rdrd\theta dz = \frac{m}{\pi R^2 h}\int_0^R r^3 dr\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^h dz = \frac{mR^2}{2}$$

car en coordonnées cylindriques, on a : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ dV = rdrd\theta dz \end{cases}$

R4- Le moment d'inertie de *(S₂)* par rapport à l'axe $(G_2,\vec{z}_0)$ est :

$$I_{G_2z_0} = \int_{P\in(S_2)}(x^2+y^2)dm = \rho\int_{P\in(S_2)}(x^2+y^2)dV$$

en utilisant les coordonnées sphériques (φ longitude et θ co-latitude), il vient :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \\ dV = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \end{cases}$$

d'où :

$$I_{G_2z_0} = \int_{P\in(S_2)}(x^2+y^2)dm = \rho\int_{P\in(S_2)}(x^2+y^2)dV = \rho\int_{P\in(S_2)} r^2\sin^2\theta.r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

$$= \rho\int_0^R r^4 dr\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{5}Mr^2$$

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

R5- Le torseur cinétique en G du solide *(S₁)* dan son mouvement par rapport à (R₀) est :

$$[C(S_1/R_0)] = \left\{\begin{matrix} m\vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}_G(S_1/R_0) \end{matrix}\right._G$$

avec : $m\vec{V}(G/R_0) = m\dot{y}\vec{y}_0$

et

$$\boxed{\vec{\sigma}_G(S_1/R_0) = M_G^{(S_1)}\vec{\Omega}(S_1/R_0) = I_{Gz_0}\dot{\beta}\vec{z}_0 = \frac{mR^2}{2}\dot{\beta}\vec{z}_{0,1} = -\frac{mR}{2}\dot{y}\vec{z}_0}$$

R6- Le torseur dynamique en G du solide *(S₁)* par rapport à (R₀) est :

$$[D(S_1/R_0)] = \left\{\begin{matrix} m\vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}_G(S_1/R_0) \end{matrix}\right._G$$

avec :

$$m\vec{\Gamma}(G/R_0) = m\left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = m\left[\frac{d\dot{y}\vec{y}_0}{dt}\right]_{R_0} = m\ddot{y}\vec{y}_0$$

et

$$\vec{\delta}_G(S_1/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_G(S_1/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = -\frac{mR}{2}\dddot{y}\vec{y}_0$$

d'où :

$$\boxed{[D(S_1/R_0)] = \left\{\begin{array}{l} m\vec{\Gamma}(G/R_0) = m\ddot{y}\vec{y}_0 \\ \vec{\delta}_G(S_1/R_0) = -\dfrac{mR}{2}\dddot{y}\vec{y}_0 \end{array}\right._G}$$

R7- Le torseur cinétique en G du solide *(S_2)* par rapport à (R_0) est :

$$[C(S_2/R_0)] = \left\{\begin{array}{l} M\vec{V}(G_2/R_0) \\ \vec{\sigma}_G(S_2/R_0) \end{array}\right._G$$

avec

$$\vec{V}(G_2/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OG_2}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d(y\vec{y}_0 + 4r\vec{x}_2)}{dt}\right]_{R_0} = \dot{y}\vec{y}_0 + 4r\dot{\theta}\vec{y}_2$$

calculons tout d'abord le moment cinétique de la sphère en son centre d'inertie G_2.

On a : $\vec{\sigma}_{G_2}(S_2/R_0) = I_{G_2z_0}\vec{\Omega}(S_2/R_0) = \frac{2}{5}Mr^2\dot{\theta}\vec{z}_0$

la loi de transport des moments nous permet d'écrire :

$$\vec{\sigma}_G(S_2/R_0) = \vec{\sigma}_{G_2}(S_2/R_0) + M\vec{V}(G_2/R_0)\wedge\overrightarrow{G_2G} = \frac{2}{5}MR^2\dot{\theta}\vec{z}_0 + M(\dot{y}\vec{y}_0 + 4r\dot{\theta}\vec{y}_2)\wedge(-4r\vec{x}_2)$$

$$= \frac{2}{5}MR^2\dot{\theta}\vec{z}_0 + 16Mr^2\dot{\theta}\vec{z}_{2,0} + 4r\vec{x}_2 \wedge M\dot{y}\vec{y}_0$$

or $\vec{x}_2 = \cos\theta\vec{x}_0 + \sin\theta\vec{y}_0$

donc :

$$\vec{\sigma}_G(S_2/R_0) = \frac{82}{5}Mr^2\dot{\theta}\vec{z}_0 + 4Mr\dot{y}(t)\cos\theta\vec{z}_0$$

d'où :

$$\boxed{[C(S_2/R_0)] = \left\{\begin{array}{l} M\vec{V}(G_2/R_0) = M(\dot{y}\vec{y}_0 + 4r\dot{\theta}\vec{y}_2) \\ \vec{\sigma}_G(S_2/R_0) = \dfrac{82}{5}Mr^2\dot{\theta}\vec{z}_0 + 4Mr\dot{y}(t)\cos\theta\vec{z}_0 \end{array}\right._G}$$

R8- Le torseur dynamique en G du solide *(S_2)* par rapport à (R_0) est :

$$[D(S_2/R_0)] = \left\{\begin{array}{l} m\vec{\Gamma}(G_2/R_0) \\ \vec{\delta}_G(S_2/R_0) \end{array}\right._G$$

avec :

$$\vec{\Gamma}(G_2/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(G_2/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d(\dot{y}\vec{y}_0 + 4r\dot{\theta}\vec{y}_2)}{dt}\right]_{R_0} = \ddot{y}\vec{y}_0 + 4r(\ddot{\theta}\vec{y}_2 + \dot{\theta}\left[\frac{d\vec{y}_2}{dt}\right]_{R_0}$$

or $\left[\frac{d\vec{y}_2}{dt}\right]_{R_0} = \vec{\Omega}(S_2/R_0) \wedge \vec{y}_2 = \dot{\theta}\vec{z}_{0,2} \wedge \vec{y}_2 = -\dot{\theta}\vec{x}_2$

d'où : $\vec{\Gamma}(G_2/R_0) = \ddot{y}\vec{y}_0 + 4r(\ddot{\theta}\vec{y}_2 - \dot{\theta}^2\vec{x}_2)$

calculons tout d'abord le moment dynamique de la sphère en son centre d'inertie G_2 :

$$\vec{\delta}_{G_2}(S_2/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_{G_2}(S_2/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \frac{2}{5}Mr^2\ddot{\theta}\vec{z}_0$$

la loi de transport des moments nous permet d'écrire :

$$\vec{\delta}_G(S_2/R_0) = \vec{\delta}_{G_2}(S_2/R_0) + M\vec{\Gamma}(G_2/R_0) \wedge \overline{G_2G} = \frac{2}{5}Mr^2\ddot{\theta}\vec{z}_0 + M(\ddot{y}\vec{y}_0 + 4r(\ddot{\theta}\vec{y}_2 - \dot{\theta}^2\vec{x}_2)) \wedge (-4r\vec{x}_2)$$

$$= \frac{2}{5}Mr^2\ddot{\theta}\vec{z}_0 + M\ddot{y}\vec{y}_0 \wedge (-4r\vec{x}_2) + 4rM\ddot{\theta}\vec{y}_2 \wedge (-4r\vec{x}_2)$$

$$= \frac{2}{5}Mr^2\ddot{\theta}\vec{z}_0 + 16Mr^2\ddot{\theta}\vec{z}_{2,0} + 4r\vec{x}_2 \wedge M\ddot{y}\vec{y}_0 = \frac{82}{5}Mr^2\ddot{\theta}\vec{z}_0 + 4r(\cos\theta\vec{x}_0 + \sin\theta\vec{y}_0) \wedge M\ddot{y}\vec{y}_0$$

d'où :

$$\boxed{\vec{\delta}_G(S_2/R_0) = \frac{82}{5}Mr^2\ddot{\theta}\vec{z}_0 + +4Mr\cos\theta\ddot{y}(t)\vec{z}_0}$$

Problème n° 7 : système composé d'une tige et d'un disque en mouvement à l'intérieur d'un cerceau fixe.

Notions abordées

- **Torseur cinématique**
- **Condition de roulement sans glissement**
- **Matrice d'inertie**
- **Torseur cinétique**
- **Torseur dynamique**
- **Energie cinétique**

Un système matériel est composé de deux solides *(S₁)* et *(S₂)* en mouvement par rapport à un bâti auquel on affecte un repère orthonormé direct $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

- Le solide (S_1) est une tige homogène de masse $2m$, de longueur $2R$, de centre d'inertie G et qui peut tourner autour de l'axe $(O,\vec{z}_{0,1})$. Soit $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_{0,1})$ le repère associé à (R_1). On suppose que le solide (S_1) est assimilable à une barre de dimensions transversales négligeables. La position de la tige (S_1) par rapport au cerceau (S_0) est définie par : $\varphi(t)=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=(\vec{y}_0,\vec{y}_1)$

Le solide (S_1) tourne à vitesse angulaire constante ω. On pose $\overrightarrow{OG}=R\vec{x}_1$.

- Le solide (S_2) est un disque, de masse m, de rayon R et de centre d'inertie B. Ce disque roule sans glisser à l'intérieur d'un cerceau fixe (S_0) de rayon $3R$ avec $\overrightarrow{OB}=2R\vec{x}_1$. On affecte le repère $R_2(B,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_0)$ au disque et sa position par rapport au solide (S_1) est définie par : $\theta(t)=(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=(\vec{y}_1,\vec{y}_2)$

Dans tout le problème la base de projection sera $(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_{0,1})$

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

Q1- Calculer $\vec{V}(B\in S_2/R_0)$.

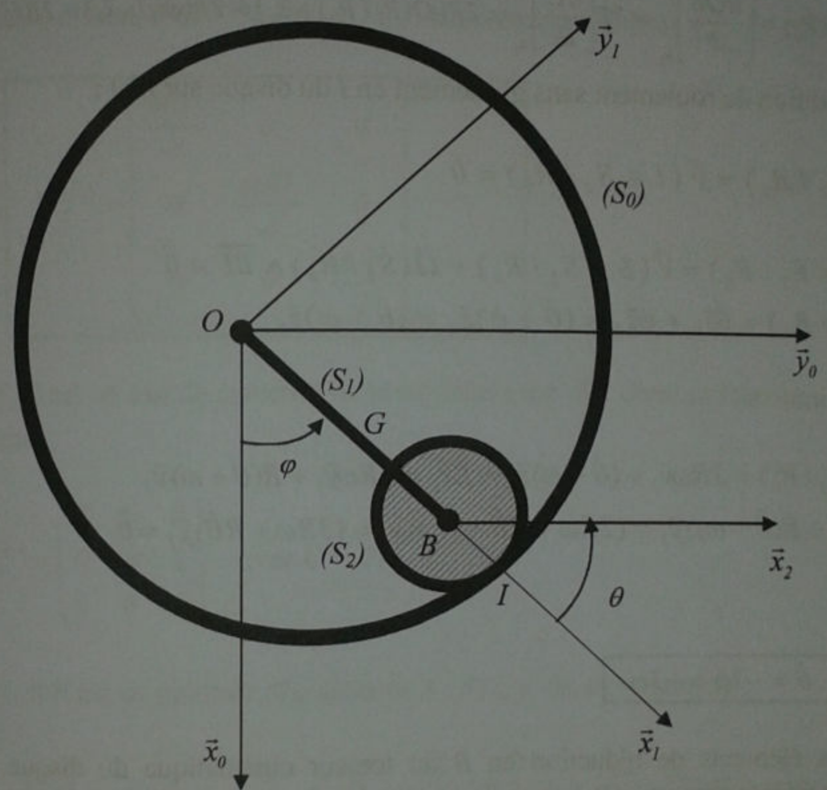
Q2- Exprimer la condition de roulement sans glissement en I du disque sur (S_0) et montrer que cette dernière se ramène à : $\dot{\theta}=-3\dot{\varphi}=-3\omega$.

Q3- Donner les éléments de réduction en B du torseur cinématique du disque dans son mouvement par rapport à (R_0).

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

Q4- Déterminer la matrice d'inertie en O de la barre (S_1) relativement à la base $(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_{0,1})$.

Q5- Déterminer la matrice d'inertie en B du disque *(S₂)* relativement à la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$.



PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

Q6- Déterminer le torseur cinétique en B du disque (S_2) par rapport à (R_0).
Q7- Déterminer le torseur cinétique en O du disque (S_2) par rapport à (R_0).
Q8- Déterminer le torseur dynamique en B du disque (S_2) par rapport à (R_0).
Q9- Déterminer le torseur dynamique en O du disque (S_2) par rapport à (R_0).
Q10- Calculer, de deux manières différentes, l'énergie cinétique du disque (S_2) dans son mouvement par rapport à (R_0).

Solution détaillée

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

R1- Calcul de $\vec{V}(B \in S_2 / R_0)$:

$$\vec{V}(B \in S_2 / R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right]_{R_0} = 2R\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_{R_0} = 2R(\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{x}_1) = 2R(\dot{\varphi}\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1) = 2R\dot{\varphi}\vec{y}_1 = 2R\omega\vec{y}_1$$

R2- Condition de roulement sans glissement en I du disque sur (S_0) :

$$\vec{V}_g(I, S_2 / R_0) = \vec{V}(I \in S_2 / R_0) = \vec{0}$$

or $\vec{V}(I \in S_2 / R_0) = \vec{V}(B \in S_2 / R_0) + \vec{\Omega}(S_2 / R_0) \wedge \overrightarrow{BI} = \vec{0}$

$$\vec{\Omega}(S_2 / R_0) = \dot{\theta}\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{z}_0 = (\dot{\theta} + \dot{\varphi})\vec{z}_0 = (\dot{\theta} + \omega)\vec{z}_0$$

ce qui donne

$$\vec{V}(I \in S_2 / R_0) = 2R\omega\vec{y}_1 + (\dot{\theta} + \omega)\vec{z}_0 \wedge R\vec{x}_1 = 2R\omega\vec{y}_1 + R(\dot{\theta} + \omega)\vec{y}_1$$
$$= (2R\omega + R(\dot{\theta} + \omega))\vec{y}_1 = (2R\omega + R\dot{\theta} + R\omega)\vec{y}_1 = (3R\omega + R\dot{\theta})\vec{y}_1 = \vec{0}$$

d'où :

$$\boxed{\dot{\theta} = -3\dot{\varphi} = -3\omega}$$

R3- Les éléments de réduction en B du torseur cinématique du disque dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$\boxed{[\mathcal{V}(S_2 / R_0)] = {}_B\begin{cases} \vec{\Omega}(S_2 / R_0) = (\dot{\theta} + \omega)\vec{z}_0 = -2\omega\vec{z}_0 \\ \vec{V}(B \in S_2 / R_0) = 2R\omega\vec{y}_1 \end{cases}}$$

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

R4- La matrice d'inertie en O de la barre (S_1) relativement à la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$ est :

$$\boxed{M_O^{(S_1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3}mR^2 \end{pmatrix}_{R_1}}$$

en effet : si P est un point de (S_1), alors on a $P(x, 0, 0)$.

$$I_{Ox_1} = 0 \text{ Et } I_{Oy_1} = I_{Oz_1} = \int_{P\in(S_1)} x^2 dm = \lambda \int_0^{2R} x^2 dx = \frac{2m}{2R}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2R} = \frac{8}{3}mR^2$$

R5- La matrice d'inertie en B du disque (S_2) relativement à la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ est :

$$\boxed{M_B^{(S_2)} = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}_{R_2}}$$

L'axe $(B, \vec{z}_{2,0})$ est un axe de symétrie de révolution pour (S_2) donc sa matrice d'inertie est de la forme :

$$M_B^{(S_2)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{R_2} \quad \text{avec } C = 2A$$

par ailleurs, si P est un point de (S_2) alors on a : $P(x, y, 0)$, ce qui donne :

$$C = I_{Bz_2} = \int_{P\in(S_2)} (x^2 + y^2)dm = \sigma \int_{P\in(S_2)} r^2 \underbrace{dS}_{rdrd\theta} = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{mR^2}{2} \text{ car } \sigma = \frac{m}{\pi R^2}$$

et

$$A = \frac{C}{2} = \frac{mR^2}{4}$$

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

R6- Le torseur cinétique en B du disque (S_2) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$[C(S_2/R_0)] = {}_B\begin{cases} m\vec{V}(B/R_0) \\ \vec{\sigma}_B(S_2/R_0) \end{cases}$$

avec

$$m\vec{V}(B/R_0) = 2mR\,\omega\vec{y}_1$$

et $\vec{\sigma}_B(S_2/R_0) = M_B^{(S_2)}.\vec{\Omega}(S_2/R_0) = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\omega \end{pmatrix} = -mR^2\omega\vec{z}_0$

d'où

$$\boxed{[C(S_2/R_0)] = {}_B\begin{cases} m\vec{V}(B/R_0) = 2mR\omega\vec{y}_1 \\ \vec{\sigma}_B(S_2/R_0) = -mR^2\omega\vec{z}_0 \end{cases}}$$

R7- Le torseur cinétique en O du disque (S_2) dans son mouvement par rapport à (R_0)

est : $[C(S_2/R_0)] = {}_O\begin{cases} m\vec{V}(B/R_0) \\ \vec{\sigma}_O(S_2/R_0) \end{cases}$ avec $m\vec{V}(B/R_0) = 2mR\,\omega\vec{y}_1$

et

$\vec{\sigma}_O(S_2/R_0) = \vec{\sigma}_B(S_2/R_0) + m\vec{V}(B/R_0) \wedge \overrightarrow{BO} = -mR^2\omega\vec{z}_0 + 2mR\omega\vec{y}_1 \wedge (-2R\vec{x}_1) = 3mR^2\omega\vec{z}_{0,1}$

d'où

$$\boxed{[C(S_2/R_0)] = {}_O\begin{cases} m\vec{V}(B/R_0) = 2mR\omega\vec{y}_1 \\ \vec{\sigma}_O(S_2/R_0) = 3mR^2\omega\vec{z}_{0,1} \end{cases}}$$

R8- Le torseur dynamique en B du disque (S_2) par rapport à (R_0) est :

$$[D(S_2/R_0)] = {}_B\begin{cases} m\vec{\Gamma}(B/R_0) \\ \vec{\delta}_B(S_2/R_0) \end{cases}$$

avec

$$\vec{\Gamma}(B/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(B/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d(2R\omega\vec{y}_1)}{dt}\right]_{R_0} = 2R\omega\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_0} = 2R\omega(\omega\vec{z}_0 \wedge \vec{y}_1) = -2R\omega^2\vec{x}_1$$

et

$$\vec{\delta}_B(S_2/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_B(S_2/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \vec{0}$$

d'où :

$$\boxed{[D(S_2/R_0)] = {}_B\begin{cases} m\vec{\Gamma}(B/R_0) = -2mR\omega^2\vec{x}_1 \\ \vec{\delta}_B(S_2/R_0) = \vec{0} \end{cases}}$$

R9- Le torseur dynamique en O du disque *(S₂)* par rapport à (R₀) est :

$$[\mathrm{D}(S_2/R_0)] = {}_O\begin{cases} m\vec{\Gamma}(B/R_0) \\ \vec{\delta}_O(S_2/R_0) \end{cases}$$

avec

$$\vec{\delta}_0(S_2/R_0) = \vec{\delta}_B(S_2/R_0) + m\vec{\Gamma}(B/R_0) \wedge \overrightarrow{BO} = \vec{0} - 2mR\omega^2\vec{x}_1 \wedge (-2R\vec{x}_1) = \vec{0}$$

d'où :

$$\boxed{[\mathrm{D}(S_2/R_0)] = {}_O\begin{cases} m\vec{\Gamma}(B/R_0) = -2mR\omega^2\vec{x}_1 \\ \vec{\delta}_O(S_2/R_0) = \vec{0} \end{cases}}$$

R10- Calcul de l'énergie cinétique du disque *(S₂)* :

Première méthode

En utilisant le théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique, il vient :

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(B/R_0) + \frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(S_2/R_0).M_B^{(S_2)}.\vec{\Omega}(S_2/R_0)$$

$$= \frac{1}{2}m(2R\omega\vec{y}_1)^2 + \frac{1}{2}(0,0,-2\omega)\begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\omega \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\boxed{T(S/R_0) = 2mR^2\omega^2 + mR^2\omega^2 = 3mR^2\omega^2}$$

Deuxième méthode

En utilisant le comoment des torseurs cinématique et cinétique de *(S₂)* dans son mouvement par rapport à (R₀), il vient :

$$2T(S_2/R_0) = [\mathcal{V}(S_2/R_0)] \otimes [\mathrm{C}(S_2/R_0)] =$$

$$ {}_B\begin{cases} \vec{\Omega}(S_2/R_0) = (\dot{\theta}+\omega)\vec{z}_0 = -2\omega\vec{z}_0 \\ \vec{V}(B \in S_2/R_0) = 2R\omega\vec{y}_1 \end{cases} \otimes {}_B\begin{cases} m\vec{V}(B/R_0) = 2mR\omega\vec{y}_1 \\ \vec{\sigma}_B(S_2/R_0) = -mR^2\omega\vec{z}_0 \end{cases} = 6\,mR^2\omega^2$$

d'où :

$$2T(S_2/R_0) = 6mR^2\omega^2$$

soit :

$$\boxed{T(S_2/R_0) = 3mR^2\omega^2}$$

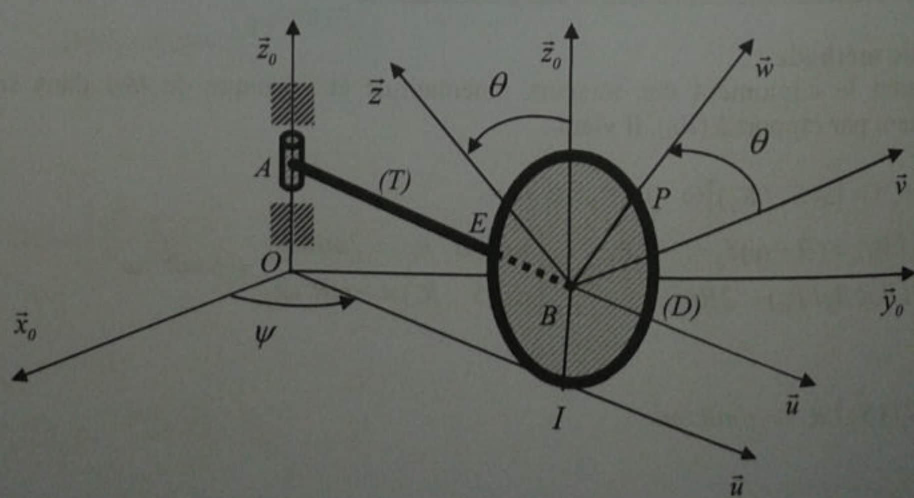
Problème n° 8 : étude du mouvement d'une meule à l'huile

Notions abordées

- **Torseur cinématique**
- **Matrice d'inertie**
- **Torseur cinétique**
- **Torseur dynamique**
- **Energie cinétique**

On considère un repère orthonormé direct $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ par rapport auquel on étudie le mouvement d'un solide *(S)* constitué :

- d'une tige *(T)*, homogène de masse *M*, de longueur *2R*, de centre d'inertie *E* et dont l'une des extrémités est liée à l'axe $(O,\vec{z}_0)$ au point *A* défini par $\overrightarrow{OA} = R\vec{z}_0$. La liaison en *A* est telle que *(T)* peut tourner autour de ce point, par rapport à (R_0).
- d'un disque *(D)* homogène de centre d'inertie *B*, de rayon *R* et de masse $m \neq M$ restant en contact quasi ponctuel et sans frottement avec le plan $(\pi) = (O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$. Le centre de *(D)* est lié à l'extrémité libre de *(T)*, et la liaison est telle que *(T)* reste perpendiculaire à *(D)*, ce dernier pouvant tourner autour de *AB*. On note *I* le point de contact avec le plan $(\pi) = (O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ à l'instant t. On suppose que (D) roule sans glisser sur $(\pi) = (O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$.



Pour repérer la position de *(S)* par rapport à (R_0), on introduit la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$, telle que :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2R} \quad ; \quad \vec{v} = \vec{z}_0 \wedge \vec{u} \quad ; \quad \psi(t) = (\vec{x}_0,\vec{u}) = (\vec{y}_0,\vec{v})$$

De même, en considérant un point P lié à la périphérie de *(D)*, on introduit la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ telle que :

$$\vec{w}=\frac{\overrightarrow{BP}}{R} \quad ; \quad \vec{z}=\vec{u}\wedge\vec{w} \quad ; \quad \theta(t)=(\vec{v},\vec{w})=(\vec{z}_0,\vec{z})$$

Dans tout le problème, les grandeurs vectorielles et matricielles seront exprimées dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

Q1- Déterminer les éléments de réduction au point E du torseur cinématique associé au mouvement de *(T)* par rapport à (R_0).
Q2- Déterminer les éléments de réduction au point B du torseur cinématique associé au mouvement de *(D)* par rapport à (R_0).
Q3- Calculer la vitesse de glissement de *(D)* au point de contact I. En déduire la condition de roulement sans glissement de *(D)* par rapport au plan $(\pi)=(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$.

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

Q4- Déterminer la matrice d'inertie en E de *(T)*.
Q5- Déterminer la matrice d'inertie en B de *(D)*.
Q6- Par application du théorème de Koenig, déduire la matrice d'inertie en E de (D).

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

Q7- Déterminer les éléments de réduction en E du torseur cinétique $[C(T/R_0)]$ associé au mouvement de *(T)* par rapport à (R_0).
Q8- Déterminer les éléments de réduction en E du torseur dynamique $[D(T/R_0)]$ associé au mouvement de *(T)* par rapport à (R_0).
Q9- Déterminer les éléments de réduction en B du torseur cinétique $[C(D/R_0)]$ associé au mouvement de *(D)* par rapport à (R_0).
Q10- Déterminer les éléments de réduction en B du torseur dynamique $[D(D/R_0)]$ associé au mouvement de *(D)* par rapport à (R_0).
Q11- Calculer l'énergie cinétique de *(T)* dans son mouvement par rapport à (R_0).
Q12- Calculer l'énergie cinétique de *(D)* dans son mouvement par rapport à (R_0).

Solution détaillée

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

R1- Les éléments de réduction au point E du torseur cinématique associé au mouvement de *(T)* par rapport à (R_0) est :

$$[\mathcal{V}(T/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(T/R_0) \\ \vec{V}(E \in T/R_0) \end{array} \right._E$$

avec

$$\vec{\Omega}(T/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0$$

et

$$\vec{V}(E \in T/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OE}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE})}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d(R\vec{z}_0 + R\vec{u})}{dt}\right]_{R_0} = R\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_0} = R(\dot{\psi}\vec{z} \wedge \vec{u}) = R\dot{\psi}\vec{v}$$

d'où :

$$\boxed{[\mathcal{V}(T/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(T/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 \\ \vec{V}(E \in S/R_0) = R\dot{\psi}\vec{v} \end{array} \right._E}$$

R2- Les éléments de réduction au point B du torseur cinématique associé au mouvement de *(D)* par rapport à (R_0) est :

$$[\mathcal{V}(D/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(D/R_0) \\ \vec{V}(B \in D/R_0) \end{array} \right._B$$

avec

$$\vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u}$$

et

$$\vec{V}(B \in D/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB})}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d(R\vec{z}_0 + 2R\vec{u})}{dt}\right]_{R_0} = 2R\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_0} = 2R\dot{\psi}\vec{v}$$

d'où :

$$\boxed{[\mathcal{V}(D/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} \\ \vec{V}(B \in D/R_0) = 2R\dot{\psi}\vec{v} \end{array} \right._B}$$

R3- $\vec{V}_g(I, D/R_0) = \vec{V}(I \in (D)/R_0) = \vec{V}(B \in (D)/R_0) + \vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \overrightarrow{BI} = R(2\dot{\psi} + \dot{\theta})\vec{v}$

La condition de roulement sans glissement est :

$$\vec{V}_g(I, D/R_0) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\dot{\psi} + \dot{\theta} = 0$$

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

R4- La matrice d'inertie en E de *(T)* relativement à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ est :

$$\boxed{M_E^{(T)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{MR^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{MR^2}{3} \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)}}$$

en effet :
si P est un point de *(T)* alors on a $P\ (u,\ 0,\ 0) \Rightarrow I_{Eu} = 0$ et tous les produits d'inertie sont nuls.

par ailleurs on a :

$$I_{Ev} = I_{Ez_0} = \int_{P \in (T)} u^2 dm = \lambda \int_{-R}^{R} u^2 du = \frac{M}{2R}\left(\frac{R^3}{3} + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{MR^2}{3}$$

R5- La matrice d'inertie en B de *(D)* relativement à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ est :

$$\boxed{M_B^{(D)} = \begin{pmatrix} \dfrac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{mR^2}{4} \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)}}$$

en effet :
l'axe $(B, \vec{u})$ est un axe de symétrie de révolution pour le disque et donc la matrice d'inertie de *(D)* en B relativement à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ est de la forme :

$$M_B^{(D)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)}$$

par ailleurs si P est un point de *(D)* alors on a $P\ (0,\ v,\ z)$.

$$\Rightarrow A = I_{Bu} = \int_{P\in(D)} (v^2+z^2)dm = \sigma \int_{P\in(D)} r^2 \underbrace{dS}_{rdrd\theta} = \frac{m}{\pi R^2}\int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{mR^2}{2}$$

et $B = \dfrac{A}{2} = \dfrac{mR^2}{4}$

R6-

$$\boxed{M_E^{(D)} = M_B^{(D)} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4}mR^2 \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)}}$$

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

R7- Les éléments de réduction en E du torseur cinétique $[C(T/R_0)]$ associé au mouvement de *(T)* par rapport à (R_0) est :

$$[C(T/R_0)] = {}_E\begin{cases} M\vec{V}(E/R_0) \\ \vec{\sigma}_E(T/R_0) \end{cases}$$

avec $\quad M\vec{V}(E/R_0) = MR\,\dot{\psi}\vec{v}$

$$\text{et } \vec{\sigma}_E(T/R_0) = M_E^{(T)}.\vec{\Omega}(T/R_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \frac{MR^2}{3}\dot{\psi}\vec{z}_0$$

d'où :

$$\boxed{[C(T/R_0)] = {}_E\begin{cases} M\vec{V}(E/R_0) = MR\,\dot{\psi}\vec{v} \\ \vec{\sigma}_E(T/R_0) = \frac{MR^2}{3}\dot{\psi}\vec{z}_0 \end{cases}}$$

R8- Les éléments de réduction en E du torseur dynamique $[D(T/R_0)]$ associé au mouvement de *(T)* par rapport à (R_0) est :

$$[D(T/R_0)] = {}_E\begin{cases} M\vec{\Gamma}(E/R_0) \\ \vec{\delta}_E(T/R_0) \end{cases}$$

avec

$$\vec{\Gamma}(E/R_0)=\left[\frac{d\vec{V}(E/R_0)}{dt}\right]_{R_0}=\left[\frac{d(R\dot{\psi}\vec{v})}{dt}\right]_{R_0}=R\ddot{\psi}\vec{v}+R\dot{\psi}\left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_0}=R\ddot{\psi}\vec{v}+R\dot{\psi}(\dot{\psi}\vec{z}_0\wedge\vec{v})=R\ddot{\psi}\vec{v}-R\dot{\psi}^2\vec{u}$$

et

$$\vec{\delta}_E(T/R_0)=\left[\frac{d\vec{\sigma}_E(T/R_0)}{dt}\right]_{R_0}=\frac{MR^2}{3}\ddot{\psi}\vec{z}_0$$

d'où :

$$\boxed{[\mathrm{D}(T/R_0)]=\left\{\begin{array}{l}M\vec{\Gamma}(E/R_0)=R\ddot{\psi}\vec{v}-R\dot{\psi}^2\vec{u}\\ \vec{\delta}_E(T/R_0)=\dfrac{MR^2}{3}\ddot{\psi}\vec{z}_0\end{array}\right._E}$$

R9- Les éléments de réduction en B du torseur cinétique $[\mathrm{C}(D/R_0)]$ associé au mouvement de *(D)* par rapport à (R_0) est :

$$[\mathrm{C}(D/R_0)]=\left\{\begin{array}{l}m\vec{V}(B/R_0)\\ \vec{\sigma}_B(D/R_0)\end{array}\right._B$$

avec :

$$\vec{V}(B/R_0)=\left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right]_{R_0}=\left[\frac{d(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})}{dt}\right]_{R_0}=\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_0}=2R\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_0}=2R(\dot{\psi}\vec{z}_0\wedge\vec{u})=2R\dot{\psi}\vec{v}$$

et

$$\vec{\sigma}_B(D/R_0)=M_B^{(D)}.\vec{\Omega}(D/R_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{mR^2}{2}&0&0\\0&\dfrac{mR^2}{4}&0\\0&0&\dfrac{mR^2}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\0\\\dot{\psi}\end{pmatrix}=\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}\vec{u}+\frac{mR^2}{4}\dot{\psi}\vec{z}_0$$

d'où

$$\boxed{[\mathrm{C}(D/R_0)]=\left\{\begin{array}{l}m\vec{V}(B/R_0)=2R\dot{\psi}\vec{v}\\ \vec{\sigma}_B(D/R_0)=\dfrac{mR^2}{2}\dot{\theta}\vec{u}+\dfrac{mR^2}{4}\dot{\psi}\vec{z}_0\end{array}\right._B}$$

R10- Les éléments de réduction en B du torseur dynamique $[\mathrm{D}(D/R_0)]$ associé au mouvement de *(D)* par rapport à (R_0) est :

$$[\mathrm{D}(D/R_0)]=\left\{\begin{array}{l}m\vec{\Gamma}(B/R_0)\\ \vec{\delta}_B(D/R_0)\end{array}\right._B$$

avec :

$$\vec{\Gamma}(B/R_0)=\left[\frac{d\vec{V}(B/R_0)}{dt}\right]_{R_0}=2R\ddot{\psi}\vec{v}+2R\dot{\psi}\left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_0}=2R\ddot{\psi}\vec{v}+2R\dot{\psi}(\dot{\psi}\vec{z}_0\wedge\vec{v})=2R\ddot{\psi}\vec{v}-2R\dot{\psi}^2\vec{u}$$

et

$$\boxed{\vec{\delta}_B(D/R_0)=\left[\frac{d\vec{\sigma}_B(D/R_0)}{dt}\right]_{R_0}=\frac{mR^2}{2}\ddot{\theta}\vec{u}+\frac{mR^2}{2}\dot{\psi}\dot{\theta}\vec{v}+\frac{mR^2}{4}\ddot{\psi}\vec{z}_0}$$

R11- L'énergie cinétique de *(T)* dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$T(T/R_0)=\frac{1}{2}M\vec{V}^2(E/R_0)+\frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(T/R_0)M_E^{(T)}\vec{\Omega}(T/R_0)$$

$$=\frac{1}{2}MR^2\dot{\psi}^2+\frac{1}{2}(0,0,\dot{\psi})\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\frac{MR^2}{3}&0\\0&0&\frac{MR^2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\psi}\end{pmatrix}=\frac{2}{3}MR^2\dot{\psi}^2$$

R12- L'énergie cinétique de *(D)* dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$T(D/R_0)=\frac{1}{2}m\vec{V}^2(B/R_0)+\frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(D/R_0)M_B^{(D)}\vec{\Omega}(D/R_0)$$

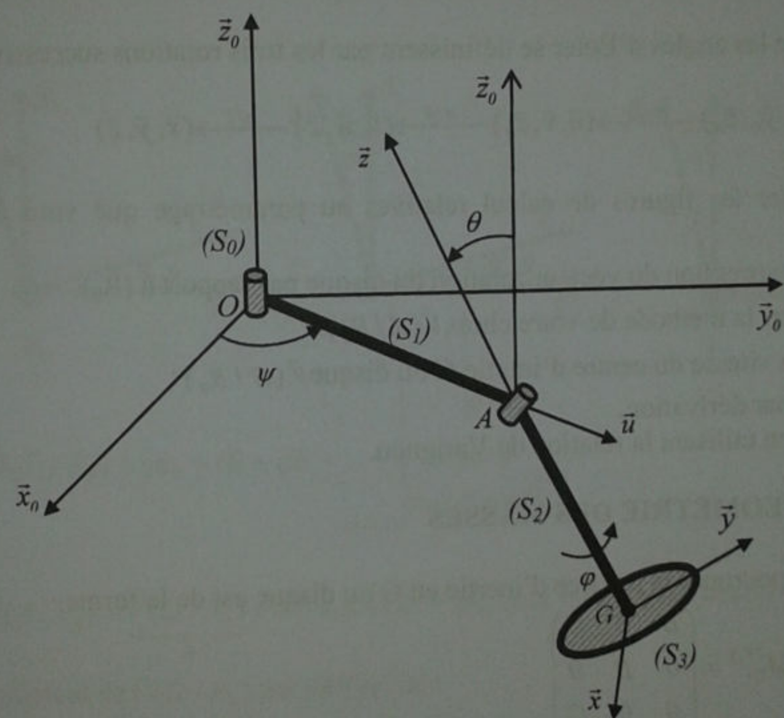
$$=\frac{1}{2}m(2R\dot{\psi})^2+\frac{1}{2}(\dot{\theta},0,\dot{\psi})\begin{pmatrix}\frac{mR^2}{2}&0&0\\0&\frac{mR^2}{4}&0\\0&0&\frac{mR^2}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\0\\\dot{\psi}\end{pmatrix}=\frac{17}{8}mR^2\dot{\psi}^2+\frac{mR^2}{4}\dot{\theta}^2$$

Problème n° 9 : système articulé barres et disque

Notions abordées

- **Paramétrage - Figures de calcul - Angles d'Euler**
- **Matrice d'inertie**
- **Moment cinétique**
- **Moment dynamique**
- **Energie cinétique**

On considère le système (Σ) composé des trois solides suivants :



- Une barre (S_1), de masse négligeable et de longueur l telle que $\overrightarrow{OA} = l\vec{u}$ et qui est relié au bâti fixe (S_0) par une liaison pivot parfaite d'axe $(O, \vec{z}_0)$,
- Une barre (S_2), de masse négligeable et de longueur l telle que $\overrightarrow{GA} = l\vec{z}$ et qui est relié au solide (S_1) par une liaison pivot parfaite d'axe $(A, \vec{u})$,
- Un disque (S_3) homogène de masse m, de centre G, de rayon a et qui est relié au solide (S_2) par une liaison pivot parfaite d'axe $(G, \vec{z})$, $(G, \vec{z})$ étant l'axe du disque.

Pour étudier ce système, on utilise le repère orthonormé direct $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, repère fixe, considéré comme galiléen et attaché au bâti fixe *(S₀)*. Par ailleurs, on définit les repères $R_1(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$, $R_2(A,\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ *et* $R(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ liés respectivement aux solides (S_1), (S_2) et (S_3).

Toutes les grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

Q1- En utilisant les angles d'Euler, proposer un paramétrage pour l'étude de ce système.
On rappelle que les angles d'Euler se définissent par les trois rotations successives suivantes :

$$(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)\xrightarrow{\psi/\vec{z}_0}(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)\xrightarrow{\theta/\vec{u}}(\vec{u},\vec{w},\vec{z})\xrightarrow{\varphi/\vec{z}}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$$

Q2- Représenter les figures de calcul relatives au paramétrage que vous aurez choisi.
Q3- Donner l'expression du vecteur rotation du disque par rapport à (R_0).
Q4- Calculer par la méthode de votre choix $\vec{V}(A/R_0)$.
Q5- Calculer la vitesse du centre d'inertie G du disque $\vec{V}(G/R_0)$:

a- par dérivation.
b- en utilisant la relation de Varignon.

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

Q6- Expliquer pourquoi la matrice d'inertie en G du disque est de la forme :

$$M_G^{(S_3)}=\begin{pmatrix}B&0&0\\0&B&0\\0&0&C\end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$

Q7- Quelle relation relie les moments d'inertie B et C. Justifier votre réponse.
Q8- Calculer alors C. En déduire B.

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

Q9- Calculer le moment cinétique du solide (S_3) en G associé au mouvement du disque par rapport au repère (R_0).
Q10- En déduire le moment cinétique de (S_3) en O.
Q11- Calculer le moment dynamique du solide (S_3) en G associé au mouvement du disque par rapport au repère (R_0).
Q12- Calculer l'énergie cinétique du système par rapport au repère (R_0).

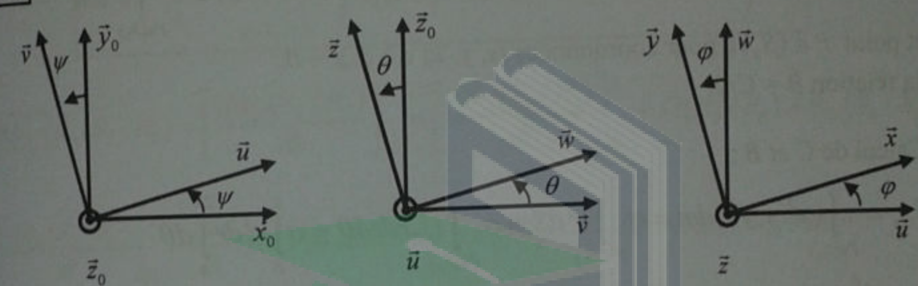
Solution détaillée

PARTIE A - ETUIDE CINEMATIQUE

R1- Les mouvements des solides peuvent être paramétrés par les angles d'Euler habituels (ψ, θ, φ) :

- $\psi(t) = (\vec{x}_0, \vec{u})$ angle de précession
- $\theta(t) = (\vec{z}_0, \vec{z})$ angle de nutation
- $\varphi(t) = (\vec{u}, \vec{x})$ angle de rotation propre

R2-



R3- $\vec{\Omega}(S_3/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z} = \left|\begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{array}\right._{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$

R4- $\vec{V}(A/R_0) = \underbrace{\vec{V}(O/R_0)}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}(S_1) \wedge \overrightarrow{OA} = \dot{\psi}\vec{z}_0 \wedge l\vec{u} = l\dot{\psi}\vec{v} = l\dot{\psi}(\cos\theta\vec{w} - \sin\theta\vec{z})$

R5- a- Calcul de $\vec{V}(G/R_0)$ par dérivation :

$$\vec{V}(G/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d(l\vec{u} - l\vec{z})}{dt}\right]_{R_0} = l\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_0} - l\left[\frac{d\vec{z}}{dt}\right]_{R_0}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{u} = \dot{\psi}\vec{z}_0 \wedge \vec{u} = \dot{\psi}\vec{v} \\ \left[\frac{d\vec{z}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{z}}{dt}\right]_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{z} = (\dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u}) \wedge \vec{z} = \dot{\psi}\sin\theta\vec{u} - \dot{\theta}\vec{w} \end{array}\right.$$

ce qui donne

$$\vec{V}(G/R_0) = l\dot{\psi}(\cos\theta\vec{w} - \sin\theta\vec{z}) - l\dot{\psi}\sin\theta\vec{u} + l\dot{\theta}\vec{w}$$
$$= -l\dot{\psi}\sin\theta\vec{u} + (l\dot{\theta} + l\dot{\psi}\cos\theta)\vec{w} - l\dot{\psi}\sin\theta\vec{z}$$

b- En utilisant la relation de Varignon :

$$\vec{V}(G/R_0)=\vec{V}(A/R_0)+\vec{\Omega}(S_2/R_0)\wedge\overrightarrow{AG}=l\dot{\psi}(\cos\theta\vec{w}-\sin\theta\vec{z})+(\dot{\psi}\vec{z}_0+\dot{\theta}\vec{u})\wedge(-l\vec{z})$$

$$=l\dot{\psi}(\cos\theta\vec{w}-\sin\theta\vec{z})-l\dot{\psi}\sin\theta\vec{u}+l\dot{\theta}\vec{w}$$

$$=-l\dot{\psi}\sin\theta\vec{u}+(l\dot{\theta}+l\dot{\psi}\cos\theta)\vec{w}-l\dot{\psi}\sin\theta\vec{z}$$

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

R6- La forme de la matrice d'inertie du disque s'explique par le fait que l'axe $(G,\vec{z})$ est un axe de symétrie de révolution.

R7- $B = C/2$, en effet du fait que $A = B$ on a la relation $A=B=C/2+\int_{P\in(S_3)}z^2dm$

or tout point $P\in(S_3)$ a pour coordonnées $(x, y, 0)$ c.à.d. $z = 0$.
d'où la relation $B = C/2$.

R8- Calcul de C *et* B :

$$C=I_{Gz}=\int_{P\in(S_3)}(x^2+y^2)dm=\sigma\int_{P\in(S_3)}r^2dS=\sigma\int_{P\in(S_3)}r^2.rdrd\theta=\sigma\int_0^a r^3dr\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{m}{\pi a^2}\times\frac{a^4}{4}\times 2\pi=m\frac{a^2}{2}$$

et

$$B=C/2=\frac{ma^2}{4}$$

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

R9-

$$\vec{\sigma}_G(S_3/R_0)=M_G^{(S_3)}\vec{\Omega}(S_3/R_0)=\begin{pmatrix}\frac{ma^2}{4} & & \\ & \frac{ma^2}{4} & \\ & & \frac{ma^2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\psi}\sin\theta\\ \dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\end{pmatrix}$$

d'où :

$$\boxed{\vec{\sigma}_G(S_3/R_0)=\frac{ma^2}{4}(\dot{\theta}\vec{u}+\dot{\psi}\sin\theta\vec{w})+\frac{ma^2}{2}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\vec{z}}$$

R10- $\vec{\sigma}_O(S_3/R_0) = \vec{\sigma}_G(S_3/R_0) + m\vec{V}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{GO}$

$$m\vec{V}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{GO} = m\begin{pmatrix} -l\dot{\psi}\sin\theta \\ l\dot{\theta} + l\dot{\psi}\cos\theta \\ -l\dot{\psi}\sin\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -l \\ 0 \\ l \end{pmatrix} = ml^2\begin{pmatrix} \dot{\theta} + \dot{\psi}\cos\theta \\ 2\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta} + \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\boxed{\vec{\sigma}_O(S_3/R_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{ma^2}{4}\dot{\theta} + ml^2(\dot{\theta} + \dot{\psi}\cos\theta) \\ (\dfrac{ma^2}{4} + +2ml^2)\dot{\psi}\sin\theta \\ \dfrac{ma^2}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) + ml^2(\dot{\theta} + \dot{\psi}\cos\theta) \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}}$$

R11- $\vec{\delta}_G(S_3/R_0) = \left[\dfrac{d\vec{\sigma}_G(S_3/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\dfrac{d\vec{\sigma}_G(S_3/R_0)}{dt}\right]_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{\sigma}_G(S_3/R_0)$

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_G(S_3/R_0)}{dt}\right]_{R_2} = \frac{ma^2}{4}\left[\ddot{\theta}\vec{u} + (\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta)\vec{w}\right] + \frac{ma^2}{2}(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)\vec{z}$$

$$\vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{\sigma}_G(S_3/R_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{ma^2}{4}\dot{\psi}\sin\theta(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) \\ -\dfrac{ma^2}{4}\dot{\theta}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$

d'où :

$$\boxed{\vec{\delta}_G(S_3/R_0) = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{ma^2}{4}\ddot{\theta} + \dfrac{ma^2}{4}\dot{\psi}\sin\theta(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) \\ \dfrac{ma^2}{4}(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta) - \dfrac{ma^2}{2}\dot{\theta}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) \\ \dfrac{ma^2}{2}(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta) \end{matrix} \right.}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$

R12- L'énergie cinétique du système est donnée par :

$$\boxed{\begin{aligned} T(\Sigma/R_0) &= T(S_3/R_0) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(G/R_0) + \frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(S_3/R_0)M_G^{(S_3)}\vec{\Omega}(S_3/R_0) \\ &= \frac{1}{2}ml^2\left[2\dot{\psi}^2\sin^2\theta + (\dot{\theta} + \dot{\psi}\cos\theta)^2\right] + \frac{ma^2}{8}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta) + \frac{ma^2}{4}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 \end{aligned}}$$